

Optik und Wellenmechanik

(WS 2024/2025 - physik311)

Stefan Linden
Physikalisches Institut
Universität Bonn



Version: 30.9.2024

Inhaltsverzeichnis

1	Geometrische Optik	1-1
1.1	Grundlagen der geometrischen Optik	1-1
1.2	Das Reflexionsgesetz	1-3
1.3	Das Brechungsgesetz	1-4
1.4	Prismen	1-4
1.5	Totalreflexion	1-6
1.6	Fata Morgana	1-7
1.7	Abbildungen	1-8
1.8	Spiegel	1-9
1.8.1	Ebener Spiegel	1-9
1.8.2	Parabolspiegel	1-10
1.8.3	Konkave Spiegel	1-11
1.8.4	Konvexe Spiegel	1-14
1.9	Linse(n)	1-14
1.9.1	Lintentypen	1-15
1.9.2	Brechung an einer sphärischen Grenzfläche	1-15
1.9.3	Linse(n)gleichung	1-18
1.9.4	Geometrische Bildkonstruktion - Sammellinse	1-19
1.9.5	Geometrische Bildkonstruktion - Streulinse	1-21
1.9.6	Linse(n)fehler	1-21
1.10	Matrizenoptik	1-23
1.10.1	Strahlvektor und $ABCD$ -Matrix	1-23
1.10.2	Propagation in einem homogenen Medium	1-24
1.10.3	Brechung an einer ebenen Grenzfläche	1-25
1.10.4	Brechung an einer sphärischen Grenzfläche	1-26
1.10.5	$ABCD$ -Matrix einer Linse	1-26
1.10.6	$ABCD$ -Matrix eines abbildenden Systems	1-27
1.11	Optische Systeme	1-31
1.11.1	Das Auge	1-31
1.11.2	Die Lupe	1-32
1.11.3	Das Mikroskop	1-35
1.11.4	Das Fernrohr	1-36
2	Die elektromagnetische Theorie des Lichts	2-1
2.1	Maxwell-Gleichungen	2-1

Inhaltsverzeichnis

2.2	Elektromagnetische Wellen	2-3
2.2.1	Wellengleichung	2-3
2.2.2	Mathematischer Einschub	2-4
2.2.3	Ebene Wellen in Vakuum	2-7
2.2.4	Ebene Wellen in isotropen Medien	2-10
2.2.5	Energie- und Impulstransport durch elektromagnetische Wellen	2-11
2.3	Optische Impulse	2-16
2.3.1	Schwebung	2-17
2.3.2	Optische Impulse in dispersiven Medien	2-18
2.4	Gauß-Strahlen	2-24
2.4.1	Paraxiale Helmholtz-Gleichung	2-24
2.4.2	Eigenschaften Gaußscher Strahlen	2-24
2.4.3	Fokussierung Gaußscher Strahlen	2-28
2.5	Klassische Dispersionstheorie	2-30
2.5.1	Das Lorentz-Oszillator Modell	2-31
2.5.2	Das Drude Modell	2-34
2.5.3	Ausblick: Nichtlineare Optik	2-36
2.6	Lichtstreuung	2-40
2.6.1	Elektrische Dipolstrahlung	2-40
2.6.2	Kohärente Streuung	2-43
2.6.3	Inkohärente Streuung	2-45
2.7	Optische Pinzetten	2-46
2.7.1	Spontankraft	2-47
2.7.2	Gradientenkraft	2-48
2.7.3	Fallenbedingung	2-49
3	Elektromagnetische Felder an Grenzflächen	3-1
3.1	Stetigkeitsbedingungen	3-1
3.2	Die Reflexion von Licht für senkrechten Einfall	3-2
3.3	Fresnel-Gleichungen	3-4
3.3.1	S-Polarisation	3-6
3.3.2	P-Polarisation	3-6
3.4	Reflexion und Transmission an der Grenzfläche zweier Dielektrika	3-7
3.4.1	Äußere Reflexion	3-7
3.4.2	Innere Reflexion	3-9
3.5	Transmissions- und Reflexionsgrad	3-10
3.5.1	Totalreflexion und evaneszente Felder	3-11
3.5.2	Reflektion an einem Spiegel bei senkrechtem Lichteinfall	3-13
3.6	Dielektrische Wellenleiter	3-15
3.6.1	Schichtwellenleiter	3-16
3.6.2	Optische Glasfasern	3-19
3.7	Ausblick in die Forschung: Oberflächen-Plasmon-Polaritonen	3-22

Inhaltsverzeichnis

4	Polarisation	4-1
4.1	Wellen mit definiertem Polarisationszustand	4-1
4.1.1	Linear polarisierte ebene Wellen	4-2
4.1.2	Zirkular polarisierte ebene Wellen	4-2
4.1.3	Elliptisch polarisierte ebene Wellen	4-4
4.2	Polarisatoren	4-6
4.3	Wellen in anisotropen Medien	4-8
4.3.1	Uniaxiale Kristalle	4-10
4.3.2	Doppelbrechung	4-15
4.3.3	Doppelbrechende Polarisatoren	4-15
4.3.4	Verzögerungsplatten	4-16
4.3.5	Spannungsdoppelbrechung	4-18
4.3.6	Anwendungsbeispiel: Flüssigkristall Modulatoren	4-18
4.4	Optische Aktivität	4-20
4.5	Faraday Effekt	4-22
4.6	Jones Formalismus	4-23
5	Wellenüberlagerung und Interferenz	5-1
5.1	Zweistrahlinterferenz	5-1
5.2	Interferometer	5-4
5.2.1	Michelson Interferometer	5-4
5.2.2	Youngscher Doppelspaltversuch	5-5
5.3	Vielstrahlinterferenz	5-7
5.3.1	Fabry-Perot-Etalon	5-8
5.3.2	Dielektrischer Spiegel	5-10
5.3.3	Anti-Reflexbeschichtung	5-11
5.4	Kohärenz	5-12
5.4.1	Zeitliche Kohärenz	5-13
5.4.2	Räumliche Kohärenz	5-15
6	Beugung	6-1
6.1	Huygenssches Prinzip	6-1
6.1.1	Brechung an einer Grenzfläche	6-2
6.1.2	Doppelbrechung	6-3
6.1.3	Wellenausbreitung und Huygenssches Prinzip	6-3
6.2	Beugung an einer ebenen Blende	6-7
6.2.1	Fresnel-Beugung	6-7
6.2.2	Fraunhofer-Beugung	6-8
6.2.3	Fraunhofer-Beugung an einer rechteckigen Blende	6-9
6.2.4	Beugung am Einzelspalt	6-10
6.2.5	Beugung an einer kreisförmigen Blende	6-12
6.2.6	Beugung am Doppelspalt	6-13
6.2.7	Beugung an Gittern	6-16

Inhaltsverzeichnis

6.3	Auflösungsvermögen eines Mikroskops	6-19
7	Quanteneigenschaften von Licht	7-1
7.1	Schwarzkörperstrahlung	7-1
7.1.1	Rayleigh-Jeans'sches Strahlungsgesetz	7-2
7.1.2	Plancksches Strahlungsgesetz	7-4
7.1.3	Lambert-Strahler und Stefan-Boltzmann-Gesetz	7-6
7.2	Emission und Absorption elektromagnetischer Strahlung	7-7
7.2.1	Linienformfunktion	7-8
7.2.2	Übergangsraten	7-8
7.3	Light amplification by stimulated emission of radiation: Laser	7-11
7.3.1	Kleinsignalverstärkung in einem Lasermedium	7-11
7.3.2	Laserschwelle	7-12
7.3.3	Erzeugung der Besetzungsinversion	7-13
7.3.4	Beispiel: Helium-Neon-Laser	7-14
7.4	Äußerer Photoeffekt	7-15
7.5	Nachweis einzelner Photonen mit einem HBT-Experiment	7-16
7.6	Eigenschaften des Photons - Zusammenfassung	7-18
8	Elemente der Quantenmechanik	8-1
8.1	Materiewellen	8-1
8.1.1	De Broglie-Wellenlänge	8-1
8.1.2	Beugung und Interferenz von Elektronen	8-1
8.1.3	Beugung von Elektronen am Kristallgitter	8-2
8.2	Quantenstruktur der Atome	8-3
8.2.1	Atomspektren	8-3
8.2.2	Franck-Hertz Versuch	8-5
8.2.3	Rutherford'sches Atommodell	8-6
8.2.4	Bohr'sches Atommodell	8-8
8.3	Wellenfunktion, Wahrscheinlichkeitsdichte und Schrödingergleichung	8-10
8.3.1	Freies Teilchen	8-12
8.3.2	Quantenmechanischer Doppelspaltversuch	8-14
8.3.3	Potentialstufe	8-16
8.3.4	Tunneleffekt	8-18
8.3.5	Teilchen in einem Potentialkasten	8-19
8.3.6	Harmonischer Oszillator	8-21

1 Geometrische Optik

Die Geometrische Optik ist das historisch älteste Teilgebiet der Optik. Sie ergibt sich als Grenzfall der Wellenoptik für verschwindend kleine Licht-Wellenlängen. Viele alltägliche optische Phänomene, wie etwa Lichtbrechung an einer Grenzfläche, Schattenwurf oder Reflexionen, können im Rahmen der geometrischen Optik verstanden werden. Außerdem ermöglicht sie eine einfache Analyse von abbildenden Systemen, so dass die geometrische Optik auch heutzutage noch eine wichtige Rolle spielt.

1.1 Grundlagen der geometrischen Optik

Im Rahmen der geometrischen Optik beschreiben wir die Ausbreitung von Licht durch ein optisches System anhand von Strahlen bzw. Strahlenbündeln. Die einzelnen Lichtstrahlen betrachten wir hierbei als geometrischen Kurven. Lichtstrahlen gehen von Lichtquellen aus und können mit einem Detektor nachgewiesen werden. Sie durchdringen einander ohne sich gegenseitig zu beeinflussen.

Man beobachtet experimentell, dass sich Licht in einem homogenen Medium geradlinig mit der Geschwindigkeit c ausbreitet. Der Brechungsindex n eines Mediums ist das Verhältnis zwischen der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit $c_0 = 299\,792\,458\text{ m s}^{-1}$ und der Lichtgeschwindigkeit c im Medium :

$$n = \frac{c_0}{c}. \quad (1.1.1)$$

Die optische Weglänge \mathcal{L}_{opt} ist definiert als das Produkt von geometrischer Weglänge d und dem Brechungsindex n :

$$\mathcal{L}_{\text{opt}} = nd. \quad (1.1.2)$$

Um eine Strecke der Länge d in einem homogenen Medium zurückzulegen, benötigt Licht die Laufzeit

$$t = \frac{d}{c} = \frac{nd}{c_0} = \frac{\mathcal{L}_{\text{opt}}}{c_0}. \quad (1.1.3)$$

Experiment: Messung der Lichtgeschwindigkeit mit gepulsten Laser (0814).

1 Geometrische Optik

In inhomogenen optischen Materialien variiert der Brechungsindex $n(\mathbf{r})$ mit dem Ort. Die optische Weglänge für einen Weg \mathcal{S} zwischen zwei Punkten A und B berechnet sich zu

$$\mathcal{L}_{\text{opt}} = \int_{\mathcal{S}} n(\mathbf{r}) ds. \quad (1.1.4)$$

Die zugehörige Lichtlaufzeit ist

$$t = \frac{\mathcal{L}_{\text{opt}}}{c_0}. \quad (1.1.5)$$

Die Lichtstrahlen in einem optischen System erfüllen das Fermatsche Prinzip. Dieses besagt, dass das Licht auf dem Weg \mathcal{S} von A nach B gelangt, für den sich die Lichtlaufzeit bei kleinen Variationen des Weges nicht ändert:

$$\boxed{\delta \mathcal{L}_{\text{opt}} = \delta \int_{\mathcal{S}} n(\mathbf{r}) ds = 0.} \quad (1.1.6)$$

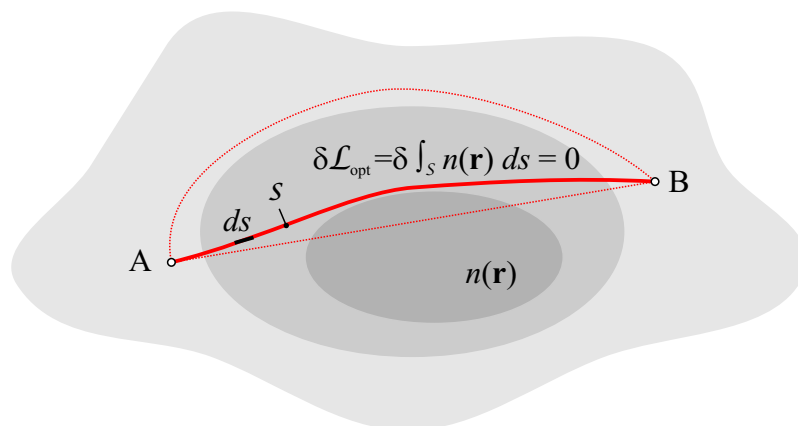


Abbildung 1.1: Fermatsches Prinzip.

Aus dem Fermatschen Prinzip folgt in Übereinstimmung mit unserer experimentellen Beobachtung, dass sich Licht in einem homogenen Medium geradlinig ausbreitet. Weiterhin sieht man sofort, dass sich Strahlengänge umkehren, wenn man die Positionen von Lichtquelle und Detektor vertauscht.

Ein Blick nach vorne

Während wir das Fermatsche Prinzip in der geometrischen Optik axiomatisch einführen, können wir es im Rahmen der elektromagnetischen Theorie des Lichts als Interferenzphänomen (siehe Kapitel 5) physikalisch motivieren. Hierzu betrachten wir eine monochromatische Welle mit Vakuumwellenlänge λ_0 , die sich entlang eines Weges \mathcal{S} ausbreitet. Die

Phase der Welle ändert sich hierbei um $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \mathcal{L}_{\text{opt}}$. Für $\delta \mathcal{L}_{\text{opt}} = 0$ „sammeln“ Wellen, die sich entlang benachbarter Wege ausbreiten, die selbe Phase auf und sie interferieren daher konstruktiv. Im Gegensatz hierzu sind für $\delta \mathcal{L}_{\text{opt}} \neq 0$ die Phasen unterschiedlich und die Wellen interferieren destruktiv, d.h., sie löschen sich gegenseitig aus.

1.2 Das Reflexionsgesetz

Experiment: Strahlengang bei Spiegeln (0729)

Im Folgenden werden wir die Reflexion an einem ebenen Spiegel mit Hilfe des Fermatschen Prinzips analysieren. Wir nehmen hierzu an, dass der Punkt A die Quelle eines Lichtstrahls ist, der im Punkt R auf den Spiegel trifft und von dort in den Punkt B reflektiert wird. Nach Abbildung 1.2 gilt für die optische Weglänge:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{opt}} &= n\overline{AR} + n\overline{RB} \\ &= n\sqrt{(x-x_1)^2 + y_1^2} + n\sqrt{(x_2-x)^2 + y_2^2}. \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

Durch Variation des optischen Weges ergibt sich:

$$\frac{d\mathcal{L}_{\text{opt}}}{dx} = \frac{n(x-x_1)}{\sqrt{(x-x_1)^2 + y_1^2}} - \frac{n(x_2-x)}{\sqrt{(x_2-x)^2 + y_2^2}} \stackrel{!}{=} 0. \quad (1.2.2)$$

Mit Hilfe von Abbildung 1.2 lässt sich die letzte Gleichung umformen zu:

$$\sin(\alpha_i) = \sin(\alpha_r) \Rightarrow \boxed{\alpha_i = \alpha_r}. \quad (1.2.3)$$

Für ebene Spiegel gilt also das Reflexionsgesetz: Einfallswinkel = Ausfallswinkel!

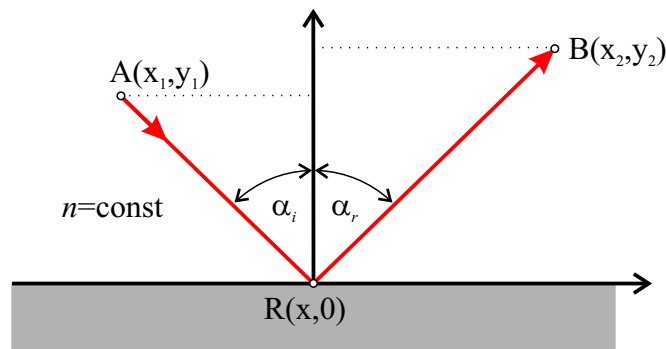


Abbildung 1.2: Reflexion an einem ebenen Spiegel.

Das Reflexionsgesetz gilt auch für gekrümmte Oberflächen. Hierbei werden der Einfallswinkel α_i und Ausfallswinkel α_r relativ zur Oberflächennormalen im Auftreffpunkt R gemessen.

1.3 Das Brechungsgesetz

Experiment: Reflexion und Brechung am Glassegment.

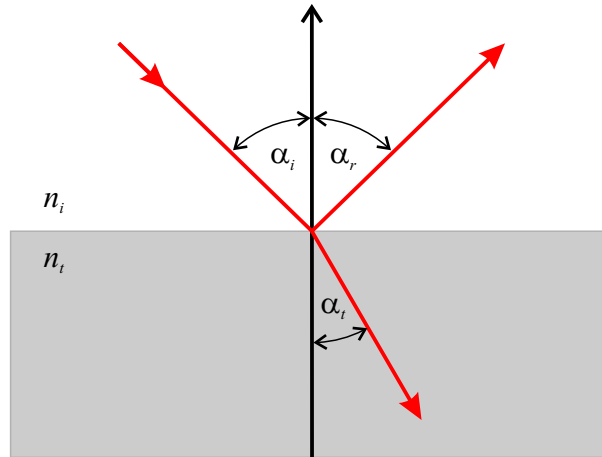


Abbildung 1.3: Lichtbrechung an einer Grenzfläche zwischen zwei homogenen Medien.

Als nächstes betrachten wir eine ebene Grenzfläche zwischen zwei Medien mit Brechungsindizes n_i und n_t (siehe Abbildung 1.3). Das Medium mit dem größeren Brechungsindex wird das optisch dichtere Medium genannt während das andere Medium als das optisch dünnere Medium bezeichnet wird. Ein einfallender Lichtstrahl wird an der Grenzfläche im Allgemeinen partiell reflektiert (siehe vorheriger Abschnitt) und partiell transmittiert. Der transmittierte Strahl wird beim Übergang von dem einen in das andere Medium aufgrund der unterschiedlichen Lichtgeschwindigkeiten in den beiden Medien gebrochen. Hierbei gilt das Brechungsgesetz (Beweis: Übung):

$$\boxed{n_i \sin(\alpha_i) = n_t \sin(\alpha_t)}. \quad (1.3.1)$$

1.4 Prismen

Experiment: Licht-Ablenkung mit einem Prisma.

Als erste Anwendung des Brechungsgesetzes wollen wir die Ablenkung eines Lichtstrahls durch ein Glasprisma mit dreiecksförmiger Grundfläche und Brechungsindex n analysieren (siehe Abbildung 1.4).

Der Strahl trete in den Punkten B und C durch die Grenzflächen des Prismas. Das Brechungsgesetz (1.3.1) verknüpft die jeweiligen Einfalls- und Ausfallswinkel:

$$\sin(\alpha_1) = n \sin(\alpha_2), \quad (1.4.1)$$

$$n \sin(\alpha_3) = \sin(\alpha_4). \quad (1.4.2)$$

1 Geometrische Optik

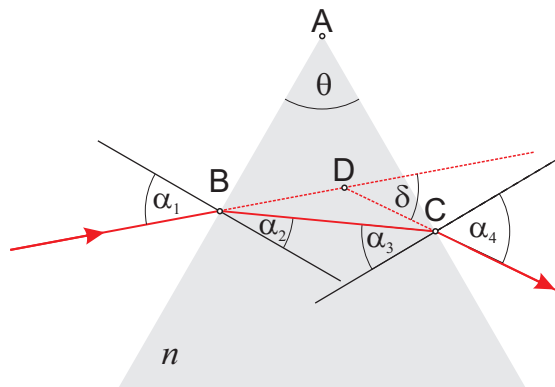


Abbildung 1.4: Ablenkung eines Lichtstrahls durch ein Prisma.

Wir betrachten jetzt das Dreieck $\triangle ABC$. Für dieses gilt aufgrund der Winkelsummenregel:

$$\theta + (90^\circ - \alpha_2) + (90^\circ - \alpha_3) = 180^\circ \Rightarrow \theta = \alpha_2 + \alpha_3. \quad (1.4.3)$$

Entsprechend erhalten wir für das Dreieck $\triangle BCD$:

$$(\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_4 - \alpha_3) + (180^\circ - \delta) = 180^\circ \Rightarrow \delta = \alpha_1 + \alpha_4 - \theta. \quad (1.4.4)$$

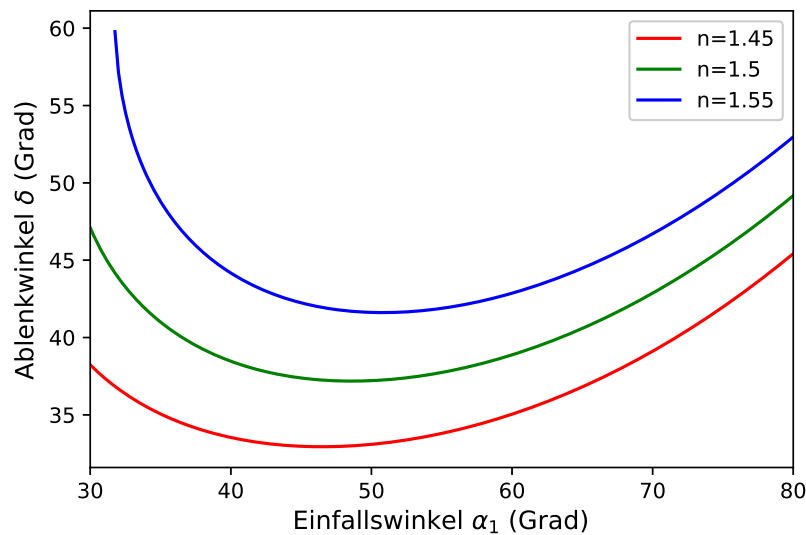


Abbildung 1.5: Berechneter Ablenkwinkel als Funktion des Einfallswinkels für ein Prisma mit Apex-Winkel $\theta = 60^\circ$.

Abbildung (1.5) zeigt die berechneten Ablenkwinkel δ als Funktion des Einfallswinkels α_1 für ein Prisma mit Apex-Winkel $\theta = 60^\circ$ für drei verschiedene Brechungsindizes. Inter-

1 Geometrische Optik

essanterweise weist $\delta(\theta_1)$ in allen Fällen einen nicht-monotonen Verlauf auf: Der Ablenkwinkel nimmt zunächst mit größer werdendem Einfallswinkel ab, durchläuft ein Minimum und steigt anschließend an. Beispielsweise finden wir für $n = 1.5$ einen minimaler Ablenkwinkel $\delta_{\min} = 37.2^\circ$ für den Einfallswinkel $\alpha_{1,\min} = 48.6^\circ$.

Die folgende Überlegung zeigt, dass die Strahlablenkung ihr Minimum annimmt, wenn das Prisma symmetrisch durchlaufen wird, d.h.

$$\alpha_1 = \alpha_4 \Rightarrow \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{\theta}{2}. \quad (1.4.5)$$

Nehmen wir zunächst an, dass das Minimum für den Fall $\alpha_2 \neq \alpha_3$ auftritt. Bei Umkehrung der Strahlrichtung ändert sich der Ablenkwinkel nicht. Damit muss für $\alpha'_2 = \alpha_3$ und $\alpha'_3 = \alpha_2$ ein Minimum der Strahlablenkung vorliegen¹. Aus Symmetriegründen (bei Spiegelung an der Symmetrieebene durch den Punkt A darf sich der Ablenkwinkel nicht ändern) muss aber auch für $\alpha'_2 = \alpha_2$ und $\alpha'_3 = \alpha_3$ der Ablenkwinkel minimal werden. Aufgrund unserer Annahme müsste es daher zwei Minima geben. Dies entspricht aber nicht der Beobachtung! Somit muss unsere Annahme $\alpha_2 \neq \alpha_3$ falsch sein, d.h., wie behauptet liegt die minimale Strahlablenkung für den Fall vor, dass das Prisma symmetrisch durchlaufen wird.

Experiment: Dispersion am Glasprisma.

Fällt ein gebündelter weißer Lichtstrahl auf ein Glasprisma, so können wir hinter dem Prisma einen Farbverlauf ("Regenbogen") beobachten. Aus diesem einfachen Experiment können wir zwei wichtige Schlussfolgerungen ziehen:

- Weißes Licht besteht aus einer Überlagerung verschiedener Farb-Komponenten.
- Da bei gleichem Einfallswinkel die einzelnen Farbanteile in unterschiedliche Richtungen abgelenkt werden, muss sich der Brechungsindex des Glases mit der Farbe ändern. Aufgrund der stärkeren Ablenkung der blauen Farbanteile im Vergleich zu den roten folgern wir, dass beim verwendeten Glas der Brechungsindex für blaues Licht größer ist als für rotes Licht ($n(\text{blau}) > n(\text{rot})$).

1.5 Totalreflexion

Experiment: Lichtleitung im Glasstab.

Wir betrachten nun den Fall, dass ein Lichtstrahl aus dem optisch dichteren Medium kommend auf eine Grenzfläche zu einem optisch dünneren Medium trifft ($n_i > n_t$). Aus dem Brechungsgesetz folgt:

$$\sin(\alpha_t) = \frac{n_i}{n_t} \sin(\alpha_i). \quad (1.5.1)$$

¹Wenn das Prisma von rechts nach links durchlaufen wird, nummerieren wir die Winkel in umgekehrter Reihenfolge durch und versehen sie zur Unterscheidung mit einem Strich.

1 Geometrische Optik

Der Lichtstrahl kann wegen $\sin(\alpha_t) \leq 1$ nur in das zweite Medium eindringen, falls der Einfallswinkel α_i kleiner ist als der Grenzwinkel der Totalreflexion

$$\alpha_g = \arcsin\left(\frac{n_t}{n_i}\right). \quad (1.5.2)$$

Ist hingegen $\alpha_i > \alpha_g$, so wird der Lichtstrahl an der Grenzfläche vollständig reflektiert. Dieser Totalreflexion genannte Effekt wird in optischen Wellenleitern und Lichtleitkabeln (Glasfasern) genutzt, um Licht über lange Distanzen mit geringen Verlusten zu transportieren.

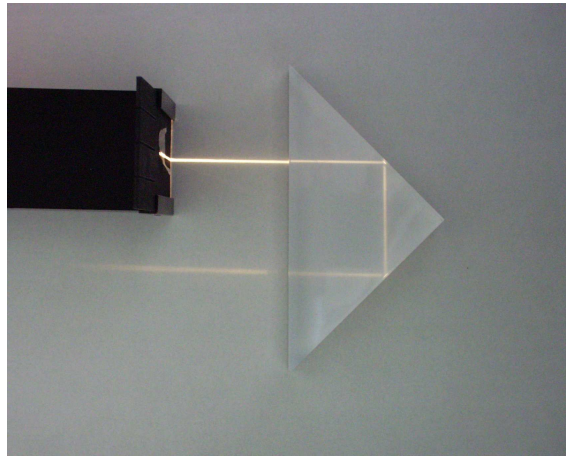
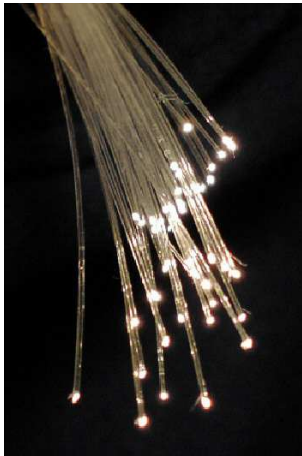


Abbildung 1.6: Technische Anwendungen der Totalreflexion. Links: Lichtleitkabel. Rechts: Retroreflektor. Bild-Quelle: Wikipedia.

Beispiel: Totalreflexion an einer Glas-Luft Grenzfläche

BK-7 Glas: $n_{\text{BK7}} = 1.514$ für rotes Licht ($\lambda = 656 \text{ nm}$).

$\Rightarrow \alpha_g = 41.34^\circ$.

1.6 Fata Morgana

In inhomogenen Medien laufen Lichtstrahlen auf gekrümmten Bahnen. Ein Beispiel hierfür ist die Fata Morgana (Luftspiegelung), die an einem heißen Tag in der Wüste oder über einer Asphaltstraße beobachtet werden kann. Verursacht wird die Fata Morgana durch einen Temperaturgradienten, der zu einer räumlichen Variation des Brechungsindex der Luft führt. Hierbei nimmt der Brechungsindex mit zunehmender Temperatur ab. An einem heißen Tag können sehr flach einfallende Lichtstrahlen an der bodennahen Luftschicht total reflektiert werden.

Experiment: Fata Morgana im Aquarium.

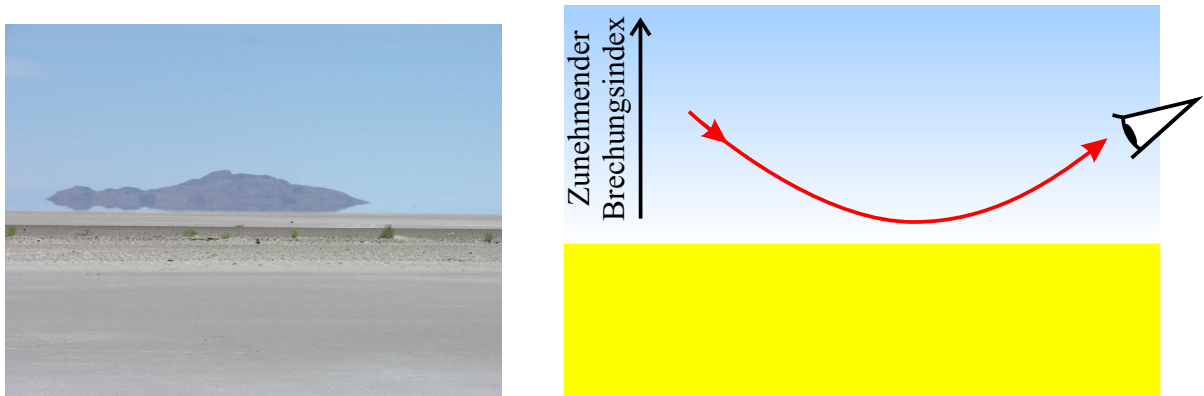


Abbildung 1.7: Prinzip einer Fata Morgana. Foto: Wikipedia.

1.7 Abbildungen

Bei einer Abbildung werden Lichtstrahlen, die von einem Punkt G eines Gegenstandes ausgehen, durch ein geeignetes optisches System im Bildpunkt B vereinigt. Nach dem Fermatschen Prinzip muss die optische Weglänge aller abgebildeten Strahlen gleich sein. Weiterhin folgt aus der Umkehrbarkeit des Lichtweges, dass Lichtstrahlen, die vom Punkt B ausgesendet werden, durch das optische System im Punkt G vereinigt werden. Hierbei ist der Weg durch das optische System unabhängig von der Strahlrichtung. Die Punkte G und B werden als konjugierte Punkte des abbildenden optischen Systems bezeichnet.

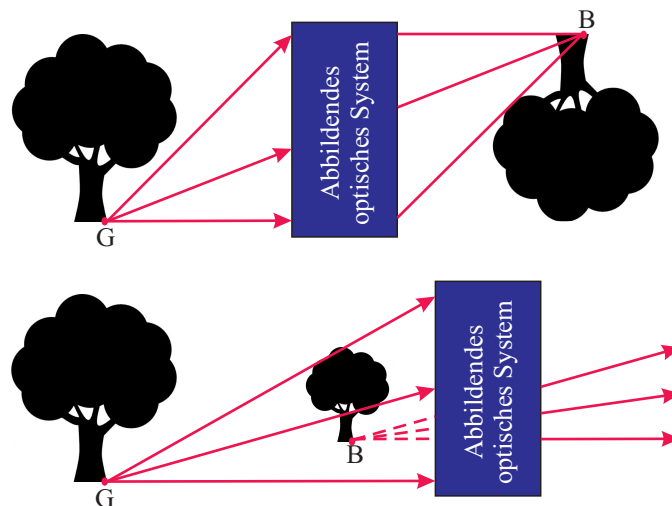


Abbildung 1.8: Ein Punkt G wird durch ein optisches System in den Punkt B abgebildet. Oben: Reelle Abbildung. Unten: Virtuelle Abbildung.

Eine ideale optische Abbildung ordnet jedem Punkt des Gegenstand genau einen Bildpunkt zu. Wird das Licht hingegen auf mehrere Bildpunkte verteilt, so erscheint das Bild unscharf.

Man unterscheidet zwei Typen von Abbildungen.

- **Reelle Abbildung:** Die Strahlen hinter dem abbildenden optischen System konvergieren zum Bildpunkt B und können auf einem Schirm einen Leuchtfleck erzeugen, d.h. es entsteht ein reelles Bild.
- **Virtuelle Abbildung:** Die Strahlen aus dem abbildenden optischen System sind divergent und stammen nur scheinbar vom Bildpunkt B . Auf einem Schirm entsteht an der entsprechenden Stelle kein Leuchtfleck, d.h. das Bild ist virtuell.

1.8 Spiegel

Experiment: Spiegelbilder beim, Plan- Hohl- und Wölbspiegel

1.8.1 Ebener Spiegel

Experiment: Virtuelles Bild, Kerze im Wasser.

Durch Reflexion an einem ebenen Spiegel entsteht ein virtuelles, unverzerrtes Bild des Gegenstandes. Das Spiegelbild erscheint genauso groß wie der Gegenstand (1:1 Abbildung). Bei der Spiegelung ändert sich die Händigkeit eines Koordinatensystems.

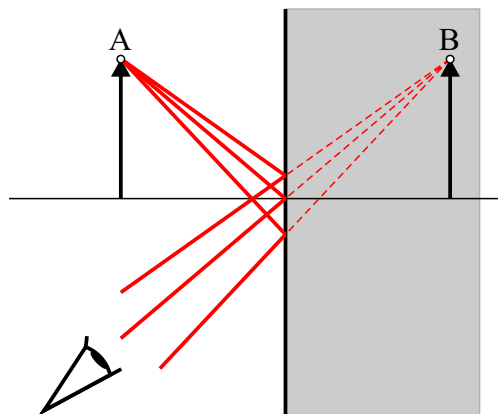


Abbildung 1.9: Optische Abbildung durch einen ebenen Spiegel.

1.8.2 Parabolspiegel

Im Folgenden wollen wir Abbildungen durch gekrümmte Spiegeloberflächen untersuchen. Je nach Wölbung der Spiegeloberfläche, unterscheiden wir zwei Fälle:

- Konkave Spiegel (Hohlspiegel) weisen eine nach innen gewölbte Spiegeloberfläche auf.²
- Konvexe Spiegel (Wölbspiegel) besitzen dagegen eine nach außen gewölbte Spiegeloberfläche.

Wir wollen annehmen, dass die Spiegeloberflächen rotationssymmetrisch sind. Die jeweilige Symmetrieachse wird als optische Achse bezeichnet.

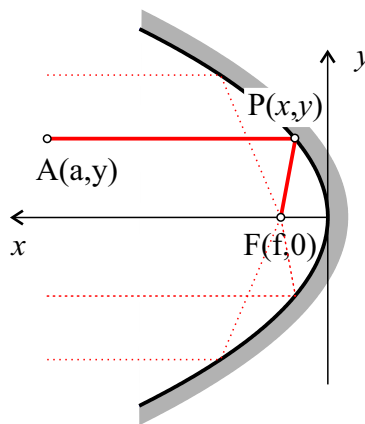


Abbildung 1.10: Konkaver Parabolspiegel.

Als erstes betrachten wir einen konkaven Parabolspiegel, dessen Form durch die Gleichung $y^2 = 4fx$ beschrieben wird. Wir nehmen nun an, dass die Lichtstrahlen parallel zur optischen Achse einfallen. Wir entnehmen Abbildung 1.10, dass der vom Punkt A ausgehende Lichtstrahl nach der Reflexion im Punkt P die optische Achse im Punkt F schneidet. Die optische Weglänge³ des Streckenzugs APF berechnet sich zu:

$$\mathcal{L}_{\text{opt}} = a - x + \sqrt{(f - x)^2 + y^2}. \quad (1.8.1)$$

Mit $y^2 = 4fx$ erhalten wir $\mathcal{L}_{\text{opt}} = a + f = \text{const}$, d.h., die optische Weglänge ist unabhängig von der y -Koordinate des Punktes A und somit für alle parallel zur optischen Achse einfallenden Strahlen gleich. Nach dem Fermatschen Prinzip fokussiert daher ein konkaver Parabolspiegel ein Bündel paralleler Lichtstrahlen im Brennpunkt F . Die Größe f wird als Brennweite bezeichnet.

Anwendungsbeispiele für konkave Parabolspiegel:

²Eselsbrücke: *konkav* erinnert an das englische Wort *cave* (Höhle).

³Wir nehmen hier an, dass die Lichtstrahlen in Luft laufen ($n = 1$).

- Scheinwerferspiegel
- „Satellitenschüssel“ für TV-Empfang
- Parabolantenne zur Satellitenkommunikation.

1.8.3 Konkave Spiegel

Hochqualitative Parabolspiegel für optische Anwendungen sind schwierig und nur unter hohen Kosten zu fertigen. In der Praxis werden daher oftmals sphärische Spiegel verwendet, die sich wesentlich einfacher herstellen lassen.

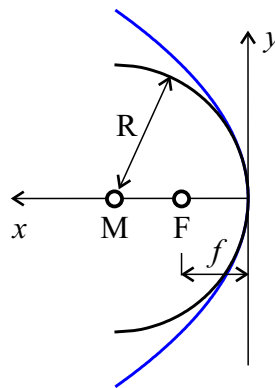


Abbildung 1.11: Vergleich eines sphärischen Spiegels (schwarze Kurve) mit einem Parabolspiegel (blaue Kurve).

Wir wollen zunächst zeigen, dass für achsennahe Strahlen ein Parabolspiegel durch einen sphärischen Spiegel approximiert werden kann. Die Oberfläche einer Kugel mit Radius R wird beschrieben durch

$$y^2 + (x - R)^2 = R^2. \quad (1.8.2)$$

Durch Umformung erhalten wir:

$$x = R - \sqrt{R^2 - y^2}. \quad (1.8.3)$$

Für achsennahe Strahlen ($y^2 \ll R^2$) gilt:

$$x = \frac{y^2}{2R} + \frac{y^4}{8R^3} + \mathcal{O}(y^6). \quad (1.8.4)$$

Ein sphärischer Spiegel wirkt in der sogenannten paraxialen Näherung also wie ein Parabolspiegel mit der Brennweite $f = R/2$. Mit zunehmendem Abstand der Strahlen von der Achse nimmt die Brennweite des sphärischen Spiegels ab (Beweis: Übung).

1 Geometrische Optik

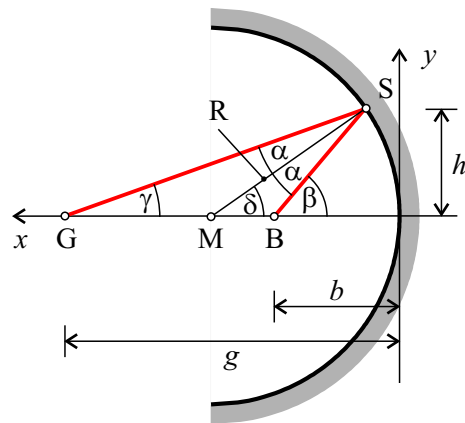


Abbildung 1.12: Abbildung eines beliebigen Punktes G auf der optischen Achse durch einen konkaven sphärischen Spiegel.

Als nächstes untersuchen wir die Abbildung eines beliebigen Punktes G auf der optischen Achse durch einen sphärischen Konkavspiegel. Hierzu betrachten wir einen von G ausgehenden Lichtstrahl, der in S an der Spiegeloberfläche reflektiert wird und die optische Achse in B schneidet (siehe Abbildung 1.12). Aufgrund des Reflexionsgesetzes gilt für die Winkel in den Dreiecken $\triangle GSM$ bzw $\triangle MSB$:

$$\alpha + \gamma - \delta = 0, \quad (1.8.5)$$

$$\alpha + \delta - \beta = 0. \quad (1.8.6)$$

Durch Umformung erhalten wir:

$$\gamma + \beta = 2\delta. \quad (1.8.7)$$

Wir beschränken uns nun auf achsennahe Strahlen (kleine Winkel!), für die die folgenden Näherungen gültig sind:

$$\gamma \approx \tan(\gamma) = \frac{h}{g}, \quad (1.8.8)$$

$$\beta \approx \tan(\beta) = \frac{h}{b}, \quad (1.8.9)$$

$$\delta \approx \sin(\delta) = \frac{h}{R}. \quad (1.8.10)$$

Mit Hilfe dieser Näherungen und Gleichung (1.8.7) erhalten wir die Abbildungsgleichung für einen sphärischen Spiegel:

$$\boxed{\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{2}{R} = \frac{1}{f}}. \quad (1.8.11)$$

1 Geometrische Optik

Zur Herleitung der Abbildungsgleichung haben wir uns auf einen Strahl beschränkt. Da die Abbildungsgleichung nicht von h abhängt, ist sie für alle von G ausgehenden, achsennahen Strahlen gültig. Somit wird der Punkt G in den Punkt B abgebildet.

Experiment: Zauberspiegel.

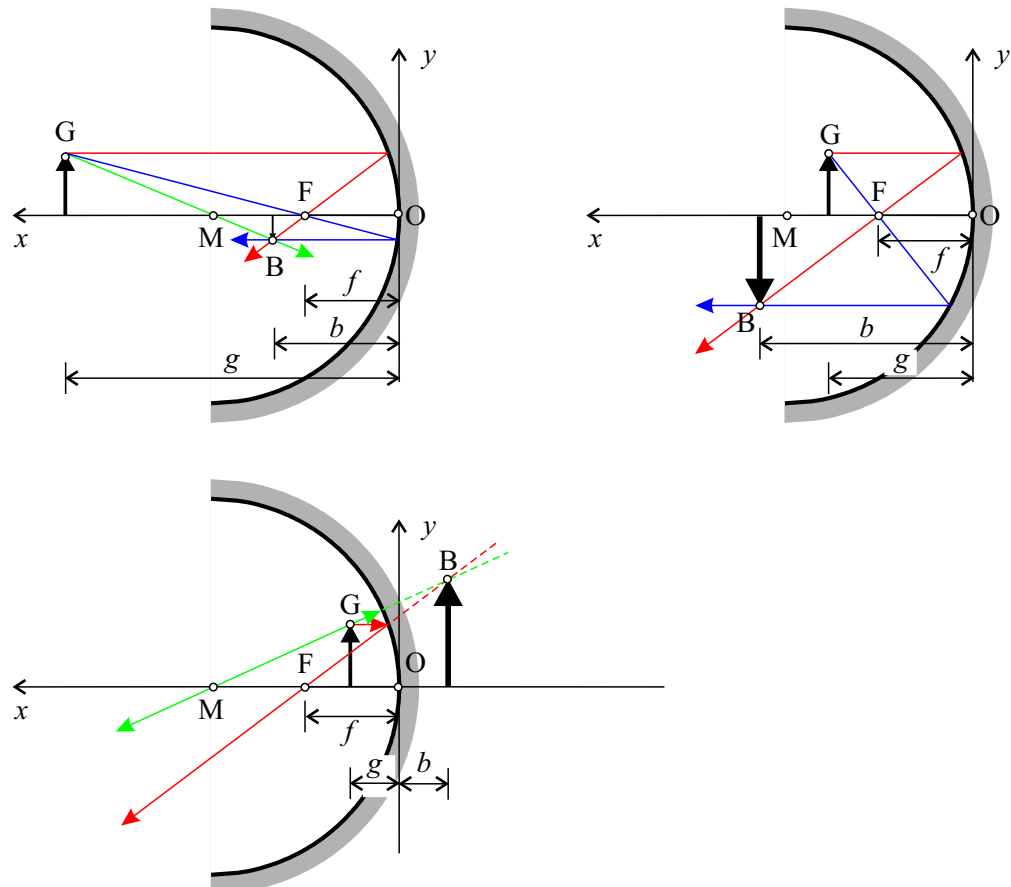


Abbildung 1.13: Geometrische Konstruktion der Abbildung für sphärische Konkavspiegel.

Wir betrachten jetzt die Abbildung eines endlich großen Objekts (hier: ein Pfeil) durch einen sphärischen Konkavspiegel. Für die geometrische Konstruktion der Abbildung eignen sich die folgenden ausgezeichneten Strahlen, die von der Spitze G des Objekts aus gezeichnet werden:

- Der Strahl parallel zur optischen Achse, der nach der Reflexion durch den Brennpunkt F geht (roter Strahl).
- Der schräg laufende Strahl, der vor der Reflexion F schneidet und nach der Reflexion parallel zur optischen Achse verläuft (blauer Strahl).

1 Geometrische Optik

- Der Strahl, der durch den Kugelmittelpunkt M geht und in sich selbst reflektiert wird (grüner Strahl).

Für kleine Abstände von der optischen Achse, schneiden sich die drei Strahlen in B , dem Bildpunkt von G .

Wie wir Abbildung 1.13 entnehmen, müssen wir mehrere Fälle unterscheiden:

- $g > 2f$: Das Bild ist reell, liegt zwischen F und M , ist verkleinert und umgekehrt.
- $2f > g > f$: Das Bild ist reell, befindet sich links von M , ist vergrößert und umgekehrt.
- $f > g$: Das Bild ist virtuell, befindet sich rechts von O , ist vergrößert und aufrecht.

1.8.4 Konvexe Spiegel

Man kann sich leicht davon überzeugen (Beweis: Übung), dass ein konvexer sphärischer Spiegel immer ein virtuelles Bild erzeugt. Formal können wir dies in der Abbildungsgleichung (1.8.11) durch eine negative Brennweite ($f < 0$) berücksichtigen.

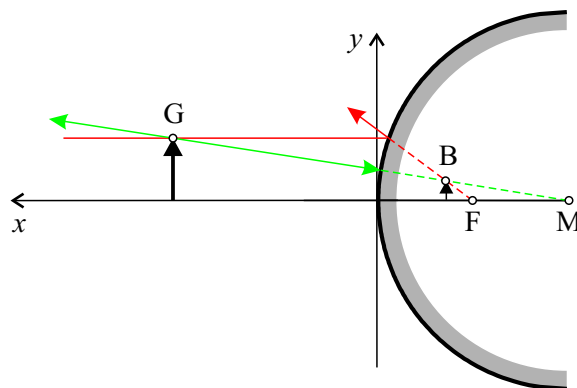


Abbildung 1.14: Abbildung mit einem konvexen sphärischen Spiegel.

1.9 Linsen

Eine Linse ist ein optisches Bauteil, das Lichtstrahlen durch Brechung an den Grenzflächen ablenkt. Hierbei werden aus Fabrikationsgründen zumeist Linsen aus Glas mit sphärischen Oberflächen verwendet. Viele optische Geräte, wie etwa Projektoren, Objektive, Linsenfernrohre und Mikroskope basieren auf einer geeigneten Kombination mehrerer optischer Linsen.

Experiment: Strahlengang durch Linsen.

1.9.1 Linsentypen

Ausgehend von der Krümmung der Linsenflächen werden Linsen in verschiedene Typen eingeteilt.

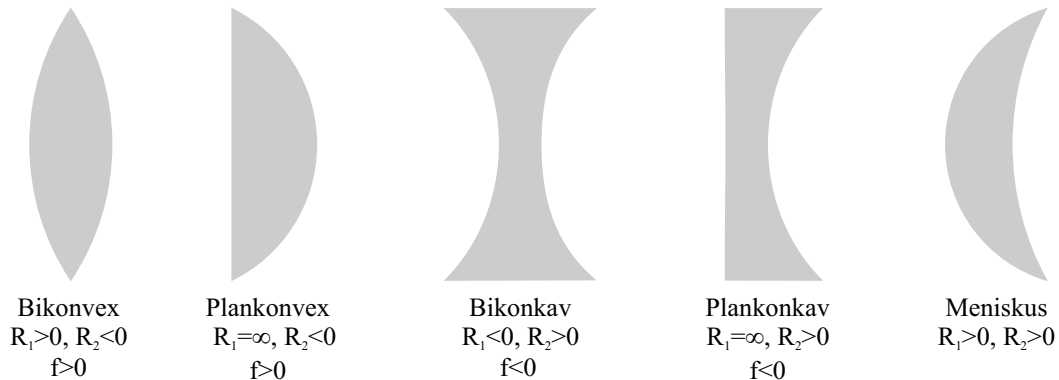


Abbildung 1.15: Bezeichnung von Linsen nach Krümmung ihrer Flächen.

1.9.2 Brechung an einer sphärischen Grenzfläche

Um die Eigenschaften einer Linse zu verstehen, werden wir zunächst die Brechung von Licht an einer konvexen sphärischen Glasfläche zwischen zwei Medien mit Brechungsindizes n_1 (links von der Grenzfläche) und n_2 (rechts von der Grenzfläche) untersuchen. Im Rahmen der paraxialen Näherung werden wir hierbei nur achsennahe Lichtstrahlen zulassen, die kleine Winkel mit der optischen Achse einschließen. Für die Analyse wollen wir die hier angegebene Vorzeichenkonvention verwenden:

	Positiv	Negativ
g	G ist links von O	G ist rechts von O
f_g	F_g ist links von O	F_g ist rechts von O
b	B ist rechts von O	B ist links von O
f_b	F_b ist rechts von O	F_b ist links von O
R	M ist rechts von O	M ist links von O
h	P ist oberhalb der optischen Achse	P ist unterhalb der optischen Achse

Sei G ein Punkt auf der optischen Achse im Medium mit dem Brechungsindex n_1 . Ein von G ausgehender Lichtstrahl trifft im Punkt P auf die Grenzfläche. Beim Übergang in das zweite Medium wird der Strahl gebrochen und schneidet die optische Achse im Bildpunkt B .

1 Geometrische Optik

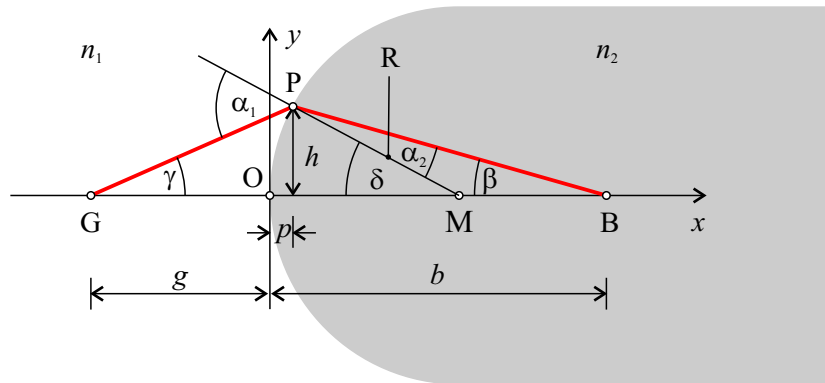


Abbildung 1.16: Brechung eines Lichtstrahls an einer konvexen Kugelfläche.

Für optische Strahlen, die nur kleine Winkel mit der optischen Achse einschließen⁴, vereinfacht sich das Brechungsgesetz zu:

$$n_1 \alpha_1 = n_2 \alpha_2. \quad (1.9.1)$$

Abbildung 1.16 entnehmen wir die folgenden Beziehungen zwischen den Winkeln:

$$\alpha_1 = \gamma + \delta \quad (1.9.2)$$

$$\alpha_2 = \delta - \beta. \quad (1.9.3)$$

Damit kann Gleichung (1.9.1) geschrieben werden als

$$n_1 (\gamma + \delta) = n_2 (\delta - \beta). \quad (1.9.4)$$

Weiterhin gilt für $p \ll g, b$ im Rahmen der paraxialen Näherung:

$$h = (g + p) \tan(\gamma) \approx g\gamma \quad (1.9.5)$$

$$= (b - p) \tan(\beta) \approx b\beta \quad (1.9.6)$$

$$= R \sin(\delta) \approx R\delta. \quad (1.9.7)$$

Einsetzen in Gleichung (1.9.4) liefert nach einer kurzen Umformung das Abbildungsgesetz:

$$\boxed{\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{R}}. \quad (1.9.8)$$

Bei Beachtung der oben angegebenen Vorzeichenkonvention erhalten wir das selbe Abbildungsgesetz auch für eine konkave sphärische Glasfläche (Beweis: Übung).

Im Folgenden wollen wir die Lage von B in Abhängigkeit von g diskutieren (siehe Abbildung 1.17):

⁴Kleinwinkelnäherung: $\sin(\alpha) \approx \alpha$

1 Geometrische Optik

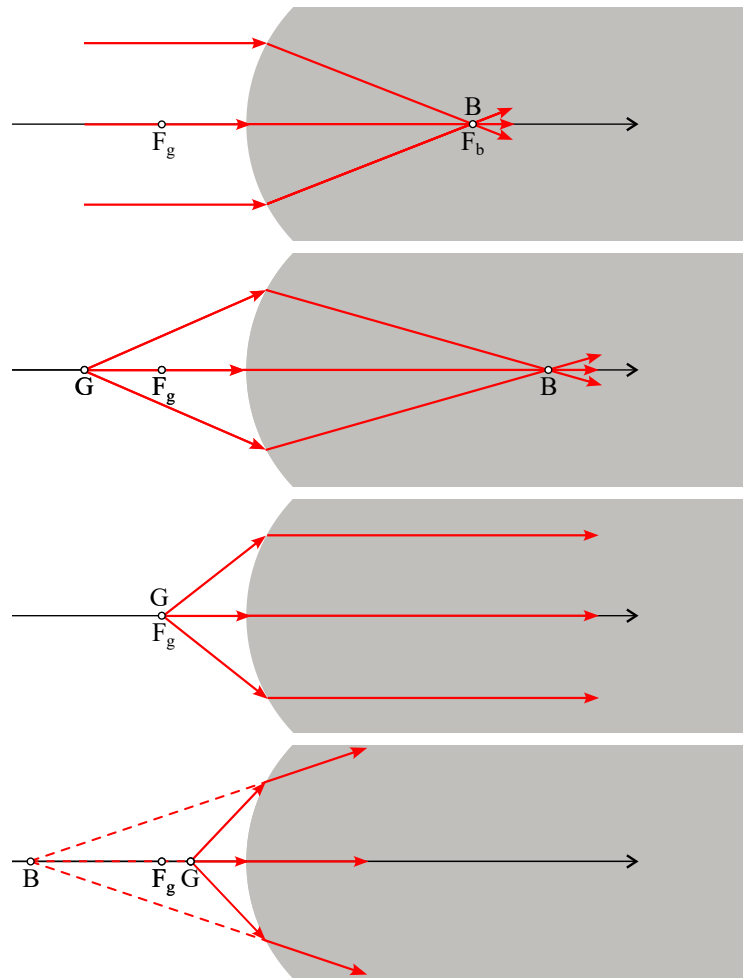


Abbildung 1.17: Brechung eines Lichtstrahls an einer konvexen Kugelfläche für verschiedene Abstände des Gegenstands von der Grenzfläche.

- Befindet sich G im Unendlichen ($g = \infty$), so wird B in den hinteren (bildseitigen) Brennpunkt F_b ($b = f_b$) abgebildet. Hierbei gilt für die bildseitige Brennweite:

$$\frac{n_1}{\infty} + \frac{n_2}{f_b} = \frac{n_2 - n_1}{R} \Rightarrow f_b = \frac{n_2}{n_2 - n_1} R. \quad (1.9.9)$$

- Für $g > Rn_1/(n_2 - n_1)$ erhalten wir ein reales Bild im zweiten Medium.
- Für $g = Rn_1/(n_2 - n_1)$ liefert das Abbildungsgesetz $b = \infty$, d.h. der Bildpunkt B befindet sich im Unendlichen. Diesen Punkt G bezeichnet man als den vorderen (gegenstandsseitigen) Brennpunkt F_g und den zugehörigen Abstand zur Grenzfläche als gegenstandsseitige Brennweite:

$$f_g = \frac{n_1}{n_2 - n_1} R. \quad (1.9.10)$$

- Für $g < Rn_1/(n_2 - n_1)$ wird b negativ, d.h., die Abbildung ist virtuell.

1.9.3 Linsengleichung

Nachdem wir jetzt die abbildenden Eigenschaften einer einzelnen sphärischen Grenzfläche verstehen, wollen wir im nächsten Schritt eine Linse mit zwei sphärischen Grenzflächen betrachten. Das Material der Linse habe den Brechungsindex n_l und ihre Dicke sei d . Vereinfachend wollen wir annehmen, dass sich auf beiden Seiten der Linse das gleiche Medium mit Brechungsindex n_m befindet.

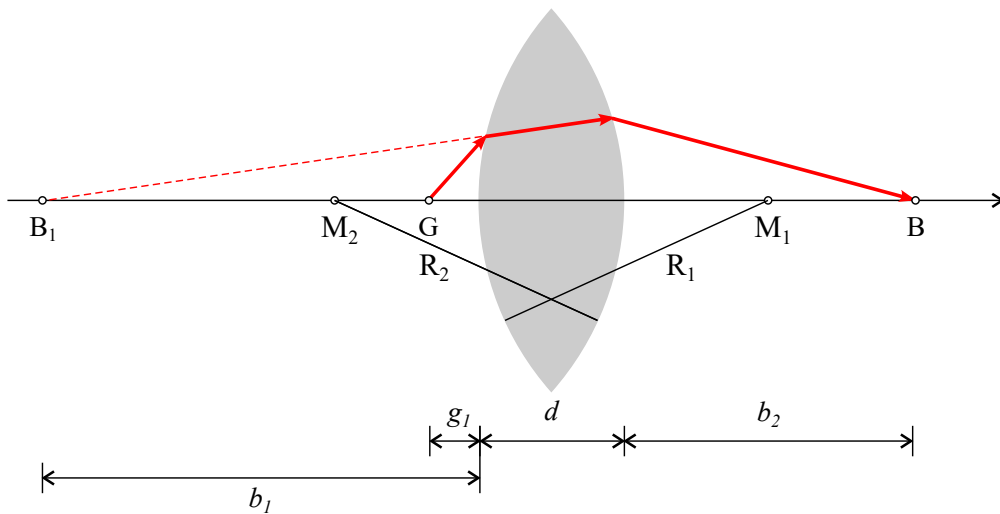


Abbildung 1.18: Dünne Linse.

Wir berücksichtigen zunächst nur die Brechung an der vorderen (linken) Grenzfläche. Das Abbildungsgesetz liefert mit $n_1 = n_m$ und $n_2 = n_l$:

$$\frac{n_m}{g_1} + \frac{n_l}{b_1} = \frac{n_l - n_m}{R_1}. \quad (1.9.11)$$

Der so entstandene Bildpunkt B_1 kann formal als Gegenstand für die Abbildung durch die hintere (rechte) Grenzfläche angesehen werden. Für die zweite Abbildung gilt mit $n_1 = n_l$, $n_2 = n_m$ und $g_2 = -b_1 + d$ (Vorzeichenkonvention!):

$$\frac{n_l}{-b_1 + d} + \frac{n_m}{b_2} = \frac{n_m - n_l}{R_2}. \quad (1.9.12)$$

Durch Addition von Gleichung (1.9.11) und (1.9.12) ergibt sich:

$$\frac{n_m}{g_1} + \frac{n_m}{b_2} = (n_l - n_m) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{n_l d}{b_1(b_1 - d)}. \quad (1.9.13)$$

1 Geometrische Optik

Für dünne Linsen ($d \rightarrow 0$) in Luft ($n_m = 1$) erhalten wir schließlich die sogenannte Linsenschleiferformel:

$$\boxed{\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = (n_l - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}. \quad (1.9.14)$$

Wir betrachten jetzt zwei Spezialfälle:

- Befindet sich G im vorderen Brennpunkt F_g ($g = f_g$), so wird B nach Unendlich abgebildet ($b = \infty$):

$$\frac{1}{f_g} + \frac{1}{\infty} = (n_l - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \Rightarrow f_g = \frac{1}{(n_l - 1)} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \quad (1.9.15)$$

- Befindet sich G im Unendlichen ($g = \infty$), so wird B in den hinteren Brennpunkt F_b ($b = f_b$) abgebildet:

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{f_b} = (n_l - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \Rightarrow f_b = \frac{1}{(n_l - 1)} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \quad (1.9.16)$$

Die beiden Brennpunkte haben also den gleichen Abstand von der Linse: $f_b = f_g$. Mit der Brennweite

$$f = \frac{1}{(n_l - 1)} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \quad (1.9.17)$$

lautet die Abbildungsgleichung einer dünnen Linse in Luft:

$$\boxed{\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}}. \quad (1.9.18)$$

1.9.4 Geometrische Bildkonstruktion - Sammellinse

Wir untersuchen jetzt die Abbildung eines Objekts (hier: ein Pfeil) durch eine Sammellinse, z.B. eine bikonvexe Linse. Für die geometrische Konstruktion der Abbildung eignen sich die folgenden ausgezeichneten Strahlen, die von der Spitze des Objekts (Punkt G) aus gezeichnet werden:

- Der Strahl parallel zur optischen Achse, der nach der Linse durch den hinteren Brennpunkt F_b geht (roter Strahl).
- Der schräg laufende Strahl, der durch den vorderen Brennpunkt F_g geht und nach der Linse parallel zur optischen Achse läuft (blauer Strahl).
- Der Strahl, der durch die Mitte der Linse läuft wird nicht abgelenkt (grüner Strahl). Diese Eigenschaft des sogenannten Mittelpunktstrahls kann ganz einfach mit Hilfe der Matrizenoptik bewiesen werden (siehe Abschnitt 1.10.5)

1 Geometrische Optik

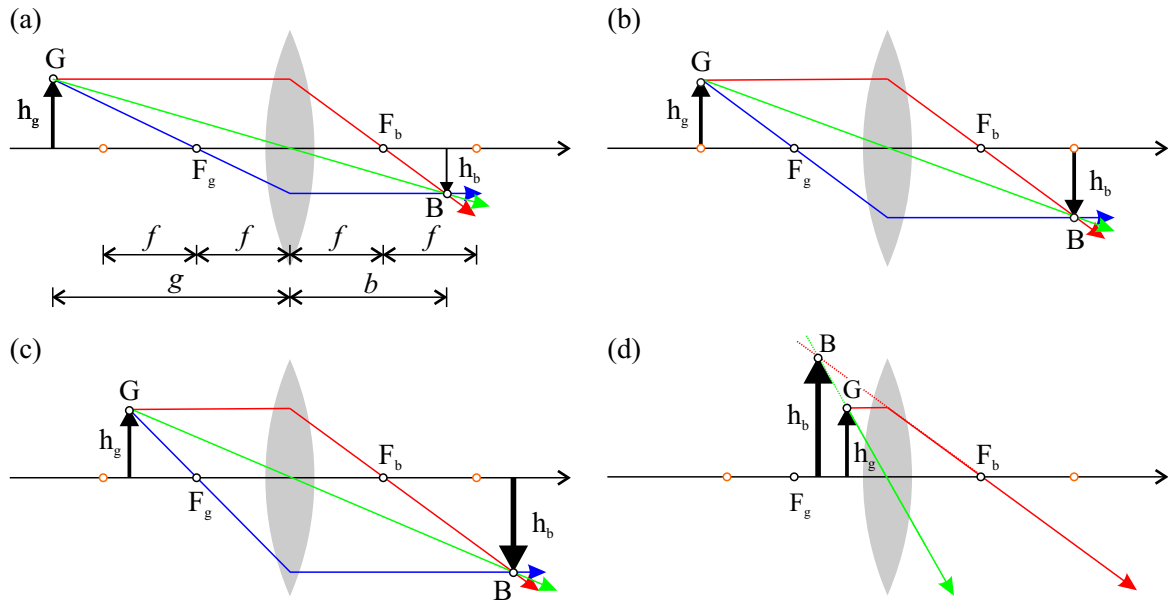


Abbildung 1.19: Geometrische Konstruktion der Abbildung für eine Sammellinse.

Die so konstruierten Strahlen schneiden sich in B , dem Bildpunkt von G .

Das Verhältnis von Bildgröße h_b und Gegenstandsgröße h_g bestimmt die transversale Vergrößerung V_t :

$$V_t \equiv \frac{h_b}{h_g}. \quad (1.9.19)$$

Anhand des Strahlensatzes finden wir:

$$\boxed{V_t = -\frac{b}{g}}. \quad (1.9.20)$$

Erzeugt die Abbildung ein reales Bild, so ist V_t negativ und das Bild des Pfeils steht auf dem Kopf. Bei einer virtuellen Abbildung ist V_t positiv und das Bild des Pfeils steht aufrecht. Zusammenfassend erhalten wir für eine Sammellinse ($f > 0$):

Gegenstandsweite	Bildweite	Abbildungstyp	transversale Vergrößerung
$2f < g < \infty$	$f < b < 2f$	reell	$-1 < V_t < 0$, verkleinert
$g = 2f < \infty$	$b = 2f$	reell	$V_t = -1$
$f < g < 2f$	$2f < b < \infty$	reell	$V_t < -1$, vergrößert
$g = f$	$b \rightarrow \infty$	-	-
$g < f$	$b < -g$	virtuell	$V_t > 1$, vergrößert

1.9.5 Geometrische Bildkonstruktion - Streulinse

Abbildung 1.20 zeigt die geometrische Konstruktion der Abbildung für den Fall einer Streulinse. Hier ist zu beachten, dass der gegenstandsseitige Brennpunkt F_G hinter der Linse und der bildseitige Brennpunkt F_B vor der der Linse liegt. Unabhängig von der Gegenstandsweite g ist die Abbildung virtuell.

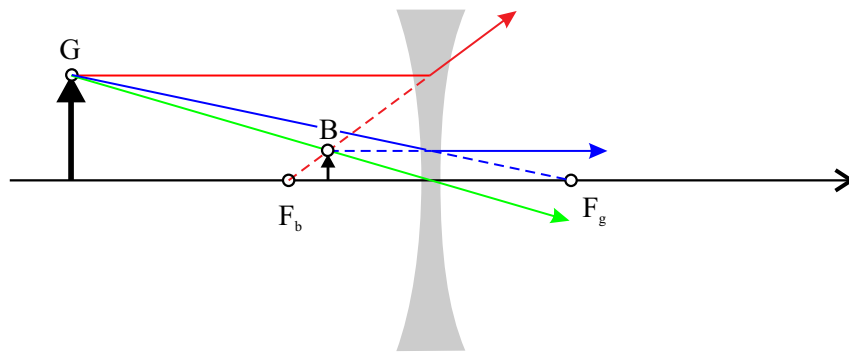


Abbildung 1.20: Geometrische Konstruktion der Abbildung für eine bikonkave dünne Linse.

Für eine Streulinse ($f < 0$) gilt:

Gegenstandsweite	Bildweite	Abbildungstyp	transversale Vergrößerung
$0 < g < \infty$	$- f < b < 0$	virtuell	$0 < V_t < 1$, verkleinert

1.9.6 Linsenfehler

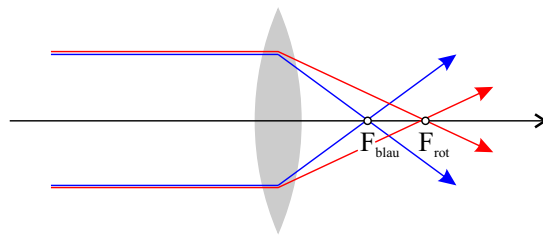
Die bisherigen Überlegungen und Formeln zur Abbildung mit Linsen sind nur im Rahmen der paraxialen Näherung streng gültig. Für achsenferne Strahlen oder für Strahlen, die die optische Achse unter einem großen Winkel schneiden, treten Abbildungsfehler auf. Zusätzlich spielen die Materialeigenschaften eine Rolle.

Chromatische Aberration

Experiment: Chromatische Aberration.

Der Brechungsindex eines Materials ändert sich mit der Farbe des Lichts. Dieser Effekt wird in der Optik Dispersion genannt. Da die Brennweite einer Linse vom Brechungsindex des Linsenmaterials abhängt, werden verschiedenfarbige Lichtstrahlen durch die Linse unterschiedlich gebrochen. Diesen Linsenfehler nennt man chromatische Abberation. Sie kann durch die geeignete Kombination von Linsen aus Gläsern mit unterschiedlicher Dispersion teilweise korrigiert werden.

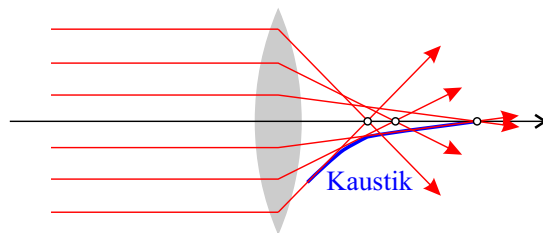
1 Geometrische Optik



Sphärische Aberration

Experiment: Sphärische Aberration.

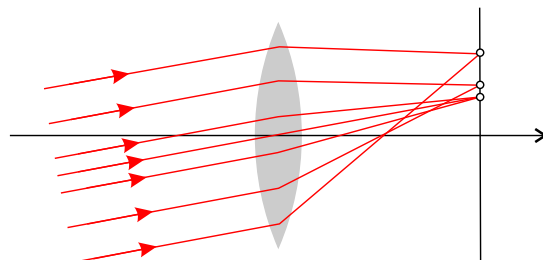
Aufgrund der Form der Linsenoberflächen hängt die Brennweite einer sphärischen Linse vom Abstand der Strahlen von der optischen Achse ab. Bei einer Sammellinse weist ein achsenferner Strahl eine kleinere Brennweite auf als ein achsennaher Strahl. Ein paralleles Strahlenbündel wird daher nicht in einen Punkt fokussiert. Die Grenzfläche des fokussierten Strahlenbündels wird als *Kaustik* bezeichnet.



Koma

Experiment: Koma.

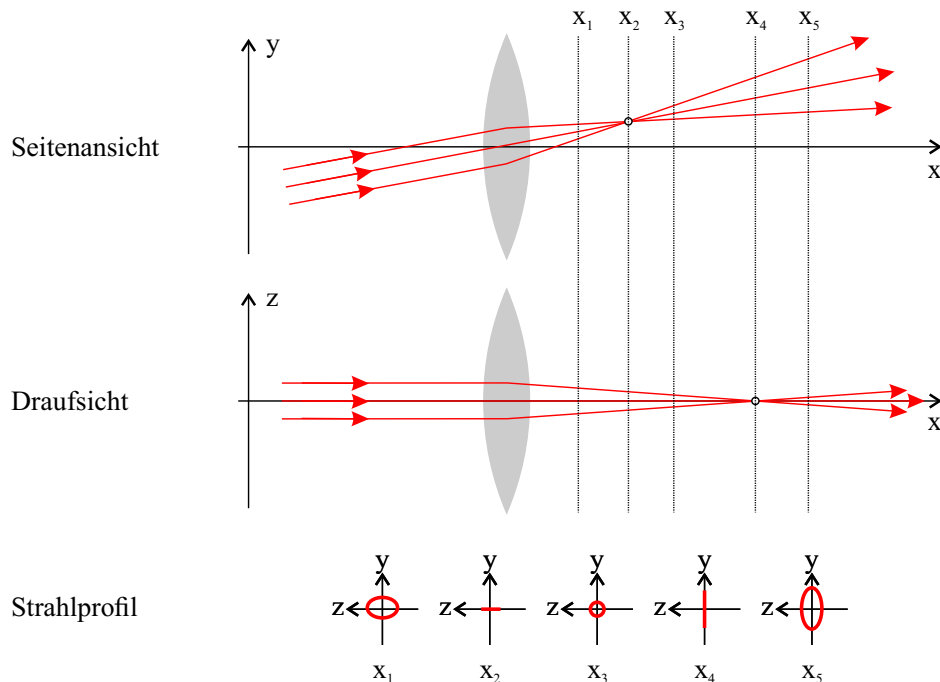
Die Koma (von lat. coma, Schopf, Schweif) tritt bei Strahlenbündel auf, die eine Linse schief durchlaufen. In diesem Fall werden die verschiedenen Strahlen auf verschiedene Punkte der Bildebene abgebildet. Das Bild einer punktförmigen Lichtquelle führt dabei zu einer „verwaschenen Bildkurve“.



Astigmatismus

Experiment: Astigmatismus.

Läuft ein Strahlenbündel schräg durch eine Linse, so werden die Strahlen der Meridian-Ebene (Ebene definiert durch die optische Achse und den Mittenstrahl des Bündels) und der Sagittal-Ebene (Ebene senkrecht zur Meridian-Ebene die den Mittenstrahl enthält) in unterschiedliche Bildpunkte abgebildet. Die Querschnittsfläche des Strahlenbündels ist hinter der Linse nicht mehr konstant.



1.10 Matrizenoptik

1.10.1 Strahlvektor und $ABCD$ -Matrix

Der Verlauf von Lichtstrahlen durch komplizierte optische Systeme kann effizient mit Hilfe der Matrizenoptik berechnet werden. Wir nehmen hierbei an, dass die paraxiale Näherung gültig ist. Ein Lichtstrahl wird für jeden Punkt x der optischen Achse durch den Abstand $r(x)$ von der optischen Achse und den Neigungswinkel $\varphi(x)$ gegen die optische Achse charakterisiert. Wir definieren, dass $r(x)$ positiv (negativ) ist, wenn der Lichtstrahl für diesen Wert von x oberhalb (unterhalb) der optischen Achse verläuft. Das Vorzeichen des Neigungswinkels wird positiv (negativ) gezählt, wenn der Lichtstrahl eine positive (negative) Steigung aufweist.

1 Geometrische Optik

Im Folgenden fassen wir den Abstand $r(x)$ und den Neigungswinkel $\varphi(x)$ relativ zur optischen Achse zum Strahlvektor $\mathbf{s}(x)$ zusammen⁵:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}. \quad (1.10.1)$$

Der Einfluss eines optischen Elements auf Lichtstrahlen kann durch eine 2×2 -Matrix $\tilde{\mathbf{M}}$ ($ABCD$ -Matrix) beschrieben werden:

$$\mathbf{s}_2 = \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{s}_1, \quad \begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}. \quad (1.10.2)$$

Hierbei ist \mathbf{s}_1 der Strahlvektor direkt vor und \mathbf{s}_2 der Strahlvektor direkt hinter dem optischen Element.

Die $ABCD$ -Matrix einer Abfolge von j optischen Elementen kann durch einfache Matrixmultiplikation berechnet werden:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_j & B_j \\ C_j & D_j \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}. \quad (1.10.3)$$

Hierbei ist die Reihenfolge der optischen Elemente bei der Matrixmultiplikation unbedingt zu beachten.

1.10.2 Propagation in einem homogenen Medium

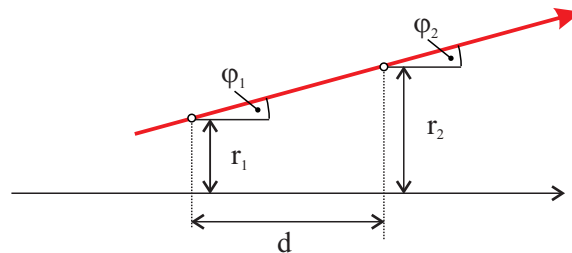


Abbildung 1.21: Propagation eines Lichtstrahls in einem homogenen Medium.

Als erstes leiten wir die $ABCD$ -Matrix für die Propagation eines Lichtstrahls in einem homogenen Medium her. Der Strahlvektor am Anfang der Strecke sei gegeben durch:

$$\mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} r_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}. \quad (1.10.4)$$

⁵Der Strahlvektor ist kein Vektor im mathematischen Sinn sondern nur eine kompakte Schreibweise.

1 Geometrische Optik

In homogenen Medien breitet sich ein Lichtstrahl geradlinig aus, so dass sich sein Neigungswinkel nicht ändert:

$$\varphi_2 = \varphi_1. \quad (1.10.5)$$

Nachdem ein Lichtstrahl die Strecke d entlang der optischen Achse zurückgelegt hat, ist sein Achsenabstand in paraxialer Näherung gegeben durch:

$$r_2 = r_1 + \varphi_1 d. \quad (1.10.6)$$

Die beiden letzten Gleichungen können in Matrixschreibweise zusammengefasst werden zu:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}. \quad (1.10.7)$$

1.10.3 Brechung an einer ebenen Grenzfläche

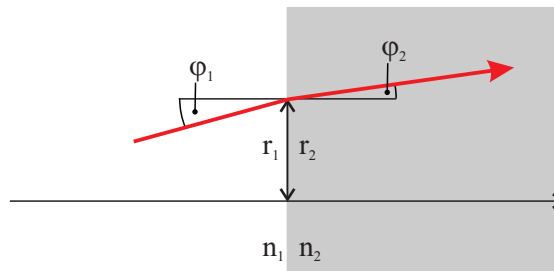


Abbildung 1.22: Brechung eines Lichtstrahls an einer ebenen Grenzfläche.

Wir wollen als nächstes die $ABCD$ -Matrix für die Brechung eines Lichtstrahls an einer ebenen Grenzfläche bestimmen. Bei der Brechung an der Grenzfläche ändert sich nicht der Abstand des Strahls zur optischen Achse. Es gilt also:

$$r_2 = r_1. \quad (1.10.8)$$

Der Neigungswinkel des Strahls im zweiten Medium folgt aus dem Brechungsgesetz. In paraxialer Näherung gilt:

$$\varphi_2 = \frac{n_1}{n_2} \varphi_1. \quad (1.10.9)$$

Die beiden Gleichungen lassen sich in Matrixschreibweise zusammenfassen zu:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}. \quad (1.10.10)$$

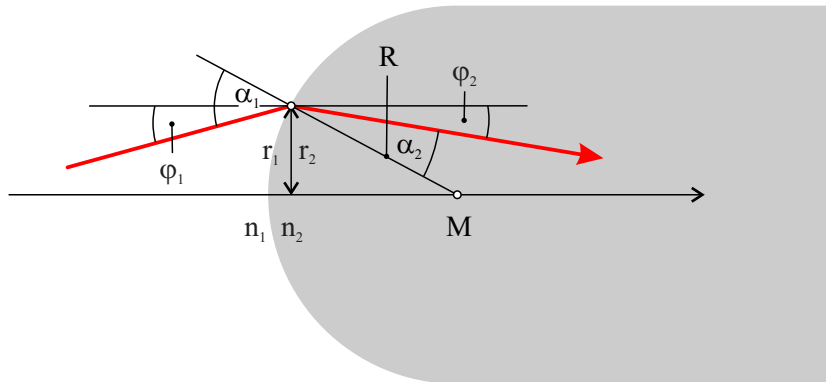


Abbildung 1.23: Brechung eines Lichtstrahls an einer sphärischen Grenzfläche.

1.10.4 Brechung an einer sphärischen Grenzfläche

Wir wollen nun die $ABCD$ -Matrix für die Brechung eines Lichtstrahls an einer sphärischen Grenzfläche bestimmen. Abbildung 1.23 entnehmen wir:

$$r_2 = r_1 \tag{1.10.11}$$

und

$$\alpha_1 - \varphi_1 = \alpha_2 - \varphi_2 = \frac{r_1}{R}. \tag{1.10.12}$$

Hierbei ist φ_2 negativ, da der Winkel im Uhrzeigersinn von der optischen Achse aus gemessen wird. Weiterhin haben wir im letzten Schritt ausgenutzt, dass für achsenahne Strahlen die Näherung $\sin(\alpha_2 - \varphi_2) = \alpha_2 - \varphi_2$ gilt. Zusammen mit dem Brechungsgesetz in paraxialer Näherung ($n_1\alpha_1 = n_2\alpha_2$) finden wir nach einer kurzen Rechnung:

$$\varphi_2 = \frac{n_1}{n_2}\varphi_1 + \frac{n_1 - n_2}{n_2} \frac{r_1}{R}. \tag{1.10.13}$$

In Matrixschreibweise wird dies zu :

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}. \tag{1.10.14}$$

1.10.5 $ABCD$ -Matrix einer Linse

Eine Linse kann als die Abfolge von drei optischen Elementen betrachtet werden: Die Brechung an der vorderen sphärischen Grenzfläche gefolgt von der Propagation in der

1 Geometrische Optik

Linse und der Brechung an der hinteren sphärischen Grenzfläche. Die $ABCD$ -Matrix einer sphärischen Linse der Dicke d aus einem Material mit Brechungsindex n in Luft kann durch Matrixmultiplikation berechnet werden zu:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{R_2} & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{nR_1} & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{(n-1)d}{nR_1} & \frac{d}{n} \\ -(n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n-1)d}{nR_1R_2} \right) & 1 + \frac{(n-1)d}{nR_2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.10.15)$$

Ist die Linse dünn ($d \rightarrow 0$), so erhalten wir mit $\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.10.16)$$

Die Abbildung mit einer dünnen Linse kann durch die folgende Matrix beschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & g \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{b}{f} & g + b - \frac{bg}{f} \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{g}{f} \end{pmatrix}. \quad (1.10.17)$$

Bei der Abbildung darf der Ort des Bildpunktes nicht vom Winkel φ_1 des ausgehenden Strahls abhängen, d.h. wir müssen

$$B = g + b - \frac{bg}{f} = 0 \quad (1.10.18)$$

fordern. Aus dieser Bedingung folgt durch triviale Umformung die Abbildungsgleichung einer dünnen Linse:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}. \quad (1.10.19)$$

1.10.6 $ABCD$ -Matrix eines abbildenden Systems

Wir betrachten jetzt ein abbildendes System der Dicke d , das durch die Matrix

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{pmatrix} \quad (1.10.20)$$

charakterisiert wird. Um die Abbildungsgleichung des Systems zu bestimmen rechnen wir zunächst die $ABCD$ -Matrix der Abbildung aus:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & d_b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d_g \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{A} + d_b\mathcal{C} & \mathcal{B} + d_g\mathcal{A} + d_b\mathcal{D} + d_gd_b\mathcal{C} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} + d_g\mathcal{C} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.10.21)$$

1 Geometrische Optik

Hierbei sind d_g und d_b die Abstände des Gegenstands und des Bildpunktes von der Vorderseite bzw. von der Rückseite des abbildenden Systems.

Es läßt sich zeigen (hier ohne Beweis), dass die Determinante dieser $ABCD$ -Matrix den Wert Eins besitzt. Zusammen mit der Bedingung $B = 0$ folgt $AD = 1$ und damit

$$(\mathcal{A} + d_b\mathcal{C})(\mathcal{D} + d_g\mathcal{C}) = 1. \quad (1.10.22)$$

Eine kurze Umformung liefert mit $f \equiv -1/\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} f^2 &= (f\mathcal{A} - d_b)(f\mathcal{D} - d_g) \\ &= (f - [d_b + (1 - \mathcal{A})f])(f - [d_g + (1 - \mathcal{D})f]). \end{aligned} \quad (1.10.23)$$

Als nächstes führen wir die sogenannten Hauptpunkte P_1 und P_2 ein. Der Abstand des Hauptpunktes P_1 zur vorderen Grenzfläche des abbildenden Systems ist definiert als

$$p_g = (1 - \mathcal{D})f. \quad (1.10.24)$$

Der hinteren Hauptpunkt P_2 befindet sich im Abstand

$$p_b = (1 - \mathcal{A})f \quad (1.10.25)$$

von der hinteren Grenzfläche des abbildenden Systems. Mit Hilfe dieser Größen kann Gleichung (1.10.23) geschrieben werden als

$$\frac{1}{d_g + p_g} + \frac{1}{d_b + p_b} = \frac{1}{f}. \quad (1.10.26)$$

Das abbildende System verhält sich exakt wie eine dünne Linse der Brennweite f , wenn wir die Gegenstandsweite $g = d_g + p_g$ und Bildweite $b = d_b + p_b$ auf die Hauptpunkte P_1 und P_2 beziehen.

Dicke Linsen

Kann die Dicke d einer sphärischen Linse nicht vernachlässigt werden, so folgt mit Hilfe von Gleichung (1.10.15):

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n - 1)d}{nR_1R_2} \right). \quad (1.10.27)$$

Die Entfernung der Hauptpunkte von den Linsengrenzflächen ist definiert durch die Gleichungen (1.10.24) und (1.10.25). Zusammen mit Gleichung (1.10.15) finden wir:

$$p_g = -\frac{(n - 1)fd}{nR_2}, \quad (1.10.28)$$

$$p_b = \frac{(n - 1)fd}{nR_1}. \quad (1.10.29)$$

1 Geometrische Optik

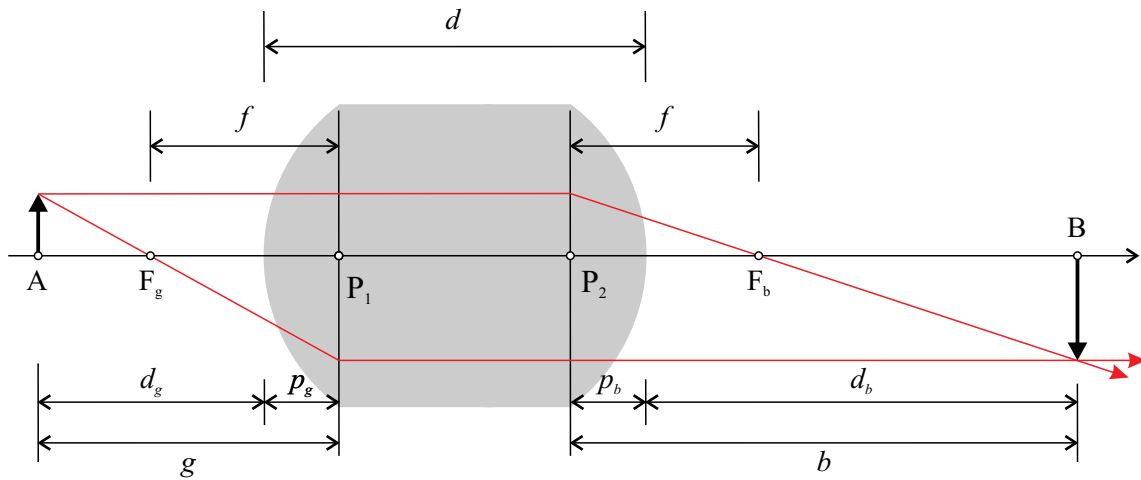


Abbildung 1.24: Abbildung mit einer dicken Linse. P_1 und P_2 sind der vordere und hintere Hauptpunkt der Linse.

Beispiel: Bikonvexe Linse

- $R_1 = 20 \text{ cm}$
- $R_2 = -30 \text{ cm}$
- $d = 1 \text{ cm}$
- $n = 1.5$

Einsetzen liefert:

- $f = 24.2 \text{ cm}$
- $p_g = 2.7 \text{ mm}$
- $p_b = 4.0 \text{ mm}$

Experiment: Kugellinse.

Beispiel: Kugellinse

- $R_1 = R$
- $R_2 = -R$
- $d = 2R$

Berechnung der Brennweite:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} &= (n-1) \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} - \frac{(n-1)2R}{nR^2} \right) = \frac{(n-1)}{n} \left(\frac{2n}{R} - \frac{(n-1)2}{R} \right) \\ &= \frac{(n-1)2}{nR} \\ \Rightarrow f &= \frac{nR}{2(n-1)} \end{aligned}$$

Berechnung der Hauptpunkte:

$$\begin{aligned} p_g &= \frac{(n-1)f2R}{nR} = \frac{(n-1)2R}{nR} \frac{nR}{2(n-1)} = R \\ p_b &= \frac{(n-1)f2R}{nR} = R \end{aligned}$$

Die beiden Hauptpunkte fallen mit dem Kugelmittelpunkt zusammen. Für $n > 2$ liegen die Brennpunkte innerhalb der Kugellinse.

Linsensysteme

Als nächstes untersuchen wir ein System aus zwei dünnen Linsen mit Brennweiten f_1 und f_2 im Abstand d . Die zugehörige $ABCD$ -Matrix berechnet sich zu:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{f_1} & d \\ -\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} + \frac{d}{f_1 f_2} & 1 - \frac{d}{f_2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.10.30)$$

Die Brennweite des Linsensystems folgt aus

$$\boxed{\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}}. \quad (1.10.31)$$

Für die geometrische Bildkonstruktion vernachlässigen wir zunächst die zweite Linse. Das von der ersten Linse erzeugte Bild dient dann als Gegenstand für die Abbildung mit der zweiten Linse. Für den zweiten Schritt eignen sich insbesondere die Strahlen durch das Zentrum und den hinteren Fokus der zweiten Linse (siehe Abbildung 1.25).

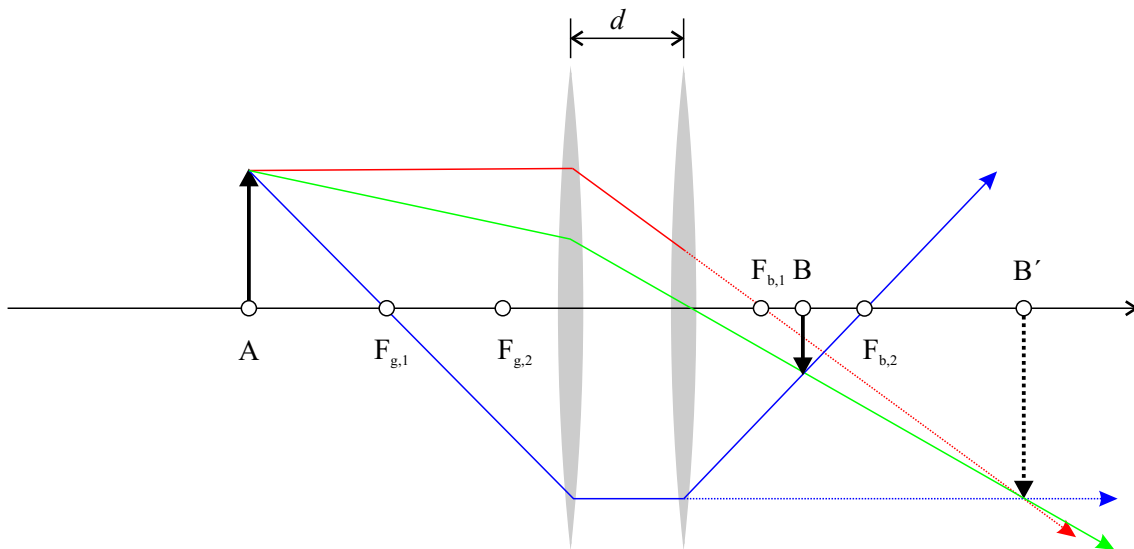


Abbildung 1.25: Geometrische Bildkonstruktion für ein System aus zwei Linsen.

1.11 Optische Systeme

1.11.1 Das Auge

Das menschliche Auge ist ein adaptives optisches Instrument. Durch den Augenmuskel kann die bikonvexe Augenlinse verformt werden (Änderung der Brennweite), so dass Gegenstände in verschiedenen Abständen scharf auf die Netzhaut (fixe Bildweite $b = 22$ mm) abgebildet werden:

- Entspanntes Auge (Blick ins Unendliche): Gegenstandsbrennweite $f_g = 17$ mm, Bildbrennweite $f_b = 22$ mm.
- Betrachten eines nahen Gegenstandes in der minimale Gegenstandsweite $g_{\min} = 100$ mm: $f_g = 14$ mm und $f_b = 19$ mm.

Ein Gegenstand kann ohne Ermüdung betrachtet werden, wenn die Gegenstandsweite nicht kleiner als die deutliche Sehweite $s_0 = 25$ cm ist. Die deutliche Sehweite dient in der Mikroskopie als Bezugsgröße.

Kurz- und Weitsichtigkeit

Kann der Augenmuskel die Linse nicht hinreichend strecken, so ist f_b zu klein und das scharfe Bild des Gegenstandes liegt vor der Netzhaut. Man spricht in diesem Fall von Kurzsichtigkeit. Wird die Augenlinse hingegen nicht mehr genügend gekrümmt, so liegt das scharfe Bild des Gegenstandes hinter der Netzhaut und es liegt Weitsichtigkeit vor.

1 Geometrische Optik

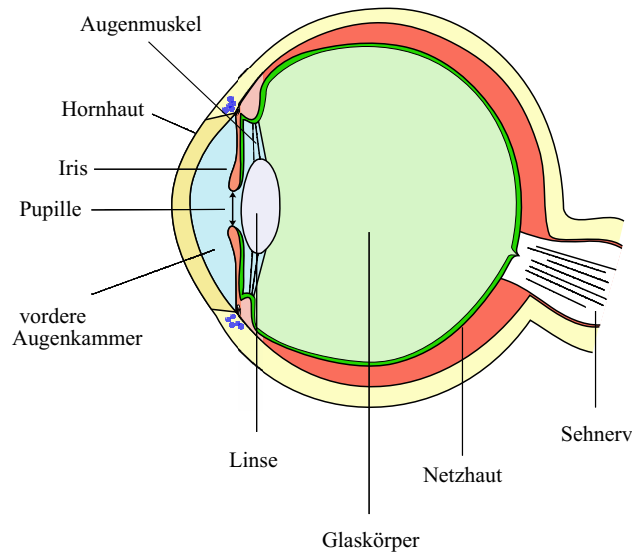


Abbildung 1.26: Schematischer Aufbau des menschlichen Auges (Quelle: Wikipedia, modifiziert).

Kurz- und Weitsichtigkeit können durch eine geeignete Streu- bzw. Sammellinse korrigiert werden (siehe Abbildung 1.27).

Sehwinkel

Die subjektiv wahrgenommene Größe eines Gegenstandes wird durch den Winkel β zwischen den Lichtstrahlen, die von den Randpunkten des Gegenstandes ausgehen, bestimmt. Für einen Gegenstand mit Durchmesser D im Abstand g gilt:

$$\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{D}{g} \Rightarrow \beta \approx \frac{D}{g}. \quad (1.11.1)$$

Der kleinste vom Auge noch auflösbare Sehwinkel beträgt $\beta_{\min} \approx 1'$. Zwei Objektpunkte können mit bloßem Auge in der deutlichen Sehweite noch aufgelöst werden, wenn ihr Abstand größer als $\Delta x_{\min} \approx s_0 \beta_{\min} = 73 \mu\text{m}$ ist.

1.11.2 Die Lupe

Die Lupe ist eine Sammellinse mit kurzer Brennweite f die zwischen Auge und Gegenstand gehalten wird. Sie kann dazu genutzt werden um den Sehwinkel, unter dem ein Gegenstand wahrgenommen wird, zu vergrößern. Die Winkelvergrößerung V_W ist definiert als

$$V_W \equiv \frac{\text{Sehwinkel mit Lupe}}{\text{Sehwinkel ohne Lupe}}. \quad (1.11.2)$$

1 Geometrische Optik

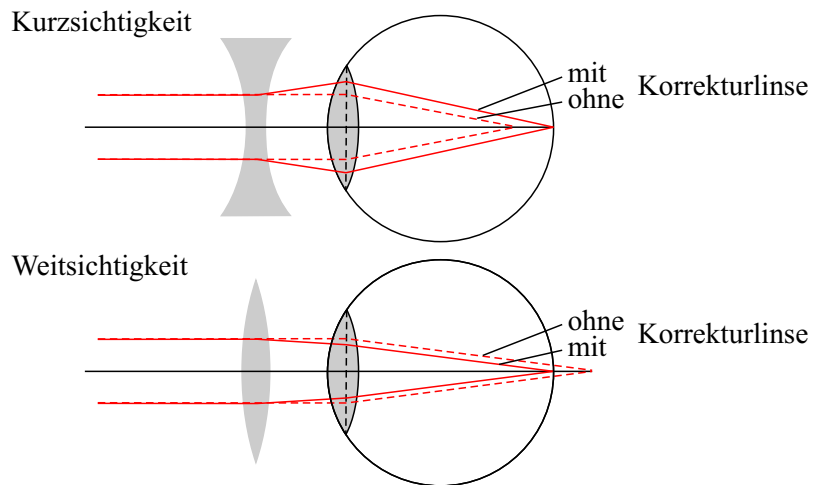


Abbildung 1.27: Kurz- und Weitsichtigkeit mit Korrektur durch eine geeignete Streu- bzw. eine Sammellinse.

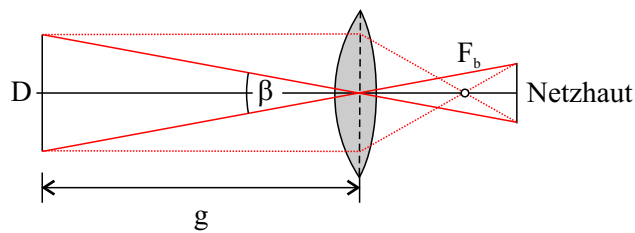


Abbildung 1.28: Definition des Sehwinkels.

Ohne Lupe ist der Sehwinkel gegeben durch:

$$\beta_0 \approx \frac{h_g}{s_0}. \quad (1.11.3)$$

Bei der Verwendung einer Lupe erscheint der Gegenstand unter dem Sehwinkel:

$$\beta \approx \frac{h_b}{L}. \quad (1.11.4)$$

Damit erzielen wir durch eine Lupe die Winkelvergrößerung:

$$V_W = \frac{h_b s_0}{h_g L}. \quad (1.11.5)$$

1 Geometrische Optik

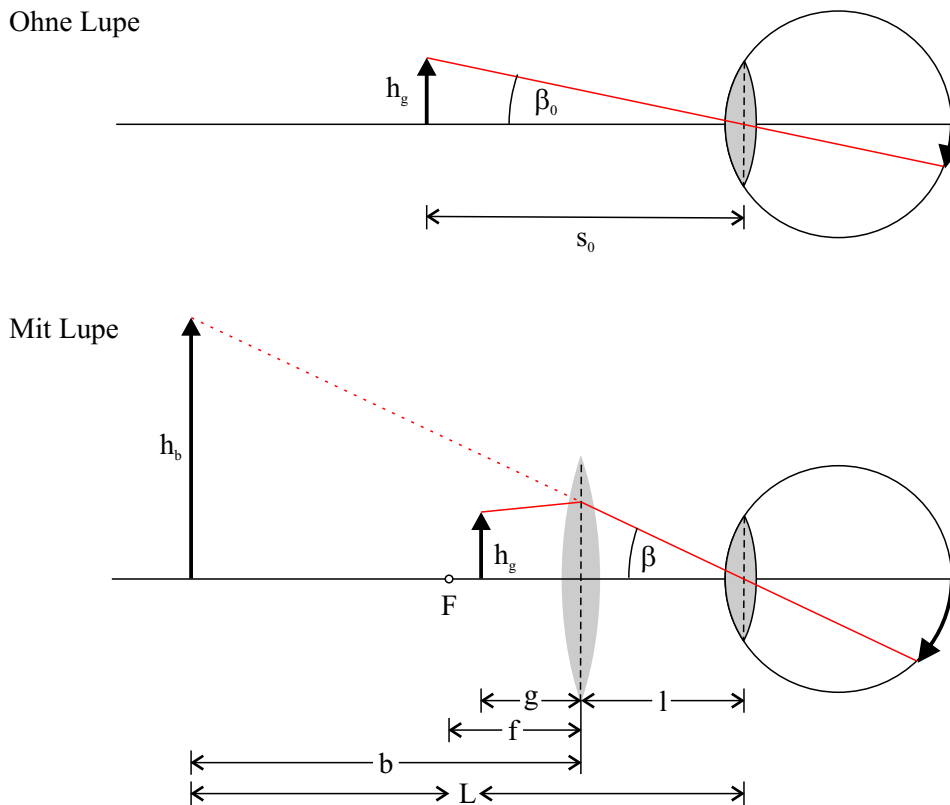


Abbildung 1.29: Vergrößerung des Sehwinkels mit der Hilfe einer Lupe.

Mit $h_b/h_g = -b/g$ (Vorzeichenkonvention!) und der Abbildungsgleichung einer dünnen Linse (1.9.18) folgt:

$$V_W = -\frac{bs_0}{gL} = \left(1 - \frac{b}{f}\right) \frac{s_0}{L} = \left(1 + \frac{L-l}{f}\right) \frac{s_0}{L}. \quad (1.11.6)$$

Stellt man den Gegenstand in den Brennpunkt der Linse, so erzeugt die Linse ein virtuelles Bild im Unendlichen ($L \rightarrow \infty$) mit der Winkelvergrößerung

$$\boxed{V_W = \frac{s_0}{f}}. \quad (1.11.7)$$

Beispiel

$f = 2 \text{ cm}$, $s_0 = 25 \text{ cm}$, Gegenstand im Brennpunkt der Linse $\rightarrow V = 12.5$.

1.11.3 Das Mikroskop

Das Mikroskop ist ein optisches Gerät zum Betrachten kleiner Gegenstände. Es besteht im Prinzip aus zwei Linsen. Die erste kurzbrennweitige Linse (Objektiv) bildet den Gegenstand in die Brennebene der zweiten Linse (Okular) ab. Diese erzeugt ein virtuelles Bild des Gegenstandes im Unendlichen, das mit entspanntem Auge betrachtet werden kann.

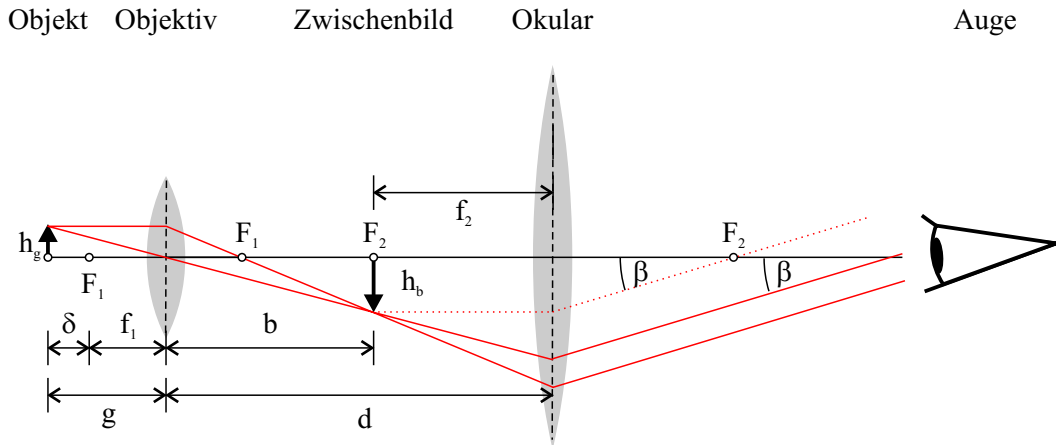


Abbildung 1.30: Strahlengang in einem Mikroskop.

Wir betrachten zunächst die Abbildung des Gegenstandes durch das Objektiv. Durch Verwendung der Linsengleichung für das Objektiv erhalten wir mit der Definition $\delta = g - f_1$:

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \Rightarrow b = \frac{f_1 g}{g - f_1} = \frac{g f_1}{\delta}. \quad (1.11.8)$$

Typischerweise gilt $\delta \ll f_1$, so dass die Bedingung $|h_b| \gg |h_g|$ erfüllt ist.

Das Okular wird als Lupe für das Zwischenbild verwendet. Für den zugehörigen Sehwinkel folgt mit $|h_b|/|h_g| = b/g$:

$$\beta \approx \frac{|h_b|}{f_2} = \frac{|h_g| b}{g f_2}. \quad (1.11.9)$$

Die Winkelvergrößerung des Mikroskops berechnet sich mit

$$\beta_0 \approx \frac{|h_g|}{s_0} \quad (1.11.10)$$

zu:

$$V_W = \frac{\beta}{\beta_0} = \frac{|h_g| b}{g f_2} \frac{s_0}{|h_g|} = \frac{b s_0}{g f_2}. \quad (1.11.11)$$

1 Geometrische Optik

Die Tubuslänge t ist definiert als der Abstand zwischen dem bildseitigen Brennpunkt des Objektivs und der Zwischenbildebene:

$$t = b - f_1. \quad (1.11.12)$$

In vielen Mikroskopen wird eine Tubuslänge von $t = 160$ mm verwendet. Mit $t \approx b$ und $g \approx f_1$ erhalten wir schließlich

$$\boxed{V_W \approx \frac{t}{f_1} \frac{s_0}{f_2}}. \quad (1.11.13)$$

Für Mikroskopobjektive wird normalerweise eine Maßstabszahl M_{Obj} angegeben mit

$$M_{\text{Obj}} = \frac{t}{f_1}. \quad (1.11.14)$$

Beispiel

20× Objektiv und Normtubus ($t = 160$ mm) $\Rightarrow f_1 = 8$ mm.

Entsprechend ist die Maßstabszahl M_{Okul} des Okulars definiert als:

$$M_{\text{Okul}} = \frac{s_0}{f_2}. \quad (1.11.15)$$

Beispiel

10× Okular $\Rightarrow f_2 = 25$ mm.

Die Winkelvergrößerung eines Mikroskops ist gegeben durch das Produkt der Maßstabszahlen von Objektiv und Okular:

$$\boxed{V_W = M_{\text{Obj}} M_{\text{Okul}}}. \quad (1.11.16)$$

1.11.4 Das Fernrohr

Das Fernrohr dient zur Vergrößerung weit entfernter Objekte. Es besteht im Prinzip aus zwei Linsen. Die erste langbrennweitige Linse erzeugt ein reelles Zwischenbild des Gegenstandes, das mit der zweiten als Lupe dienenden Linse betrachtet wird.

Keplersches Fernrohr

Wir betrachten zunächst ein Fernrohr aus zwei Sammellinsen (Keplersches Fernrohr), bei dem der bildseitige Fokus der ersten Linse mit dem gegenstandsseitigen Fokus der zweiten Linse zusammenfällt.

1 Geometrische Optik

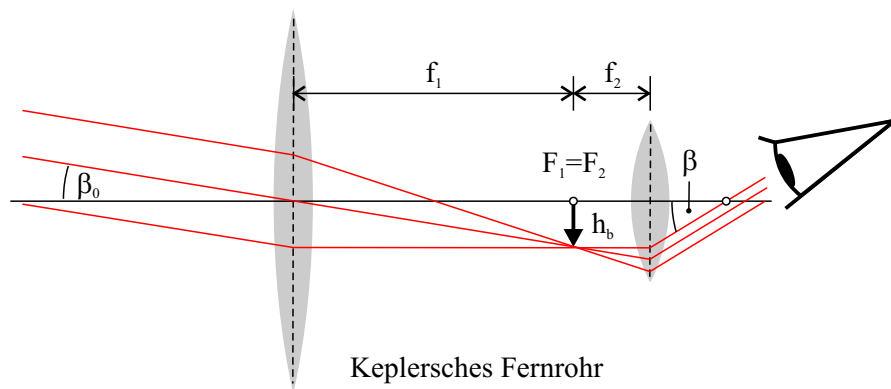


Abbildung 1.31: Strahlengang eines Keplerschen Fernrohrs.

Wir nehmen jetzt an, dass $g \gg f_1$. Der Sehinkel ohne Fernrohr beträgt:

$$\beta_0 \approx \frac{h_b}{f_1}. \quad (1.11.17)$$

Mit Fernrohr ist der Sehinkel:

$$\beta \approx \frac{h_b}{f_2}. \quad (1.11.18)$$

Damit erhalten wir folgende Winkelvergrößerung des Keplerschen Fernrohrs:

$$\boxed{V_W = \frac{f_1}{f_2}}. \quad (1.11.19)$$

Wie man Abbildung 1.31 entnehmen kann erzeugt das Keplersche Fernrohr ein umgekehrtes Bild des Gegenstandes.

Galileisches Fernrohr

Beim Galileischen Fernrohr wird die zweite Sammellinse durch eine Streulinse ersetzt. Die beiden Linsen werden so angeordnet, dass die bildseitigen Brennpunkte zusammenfallen. Diese Anordnung erlaubt eine aufrechte Betrachtung des Objekts.

Eine analoge Betrachtung ergibt für die Winkelvergrößerung des Galileischen Fernrohrs:

$$\boxed{V_W = \frac{f_1}{|f_2|}}. \quad (1.11.20)$$

1 Geometrische Optik

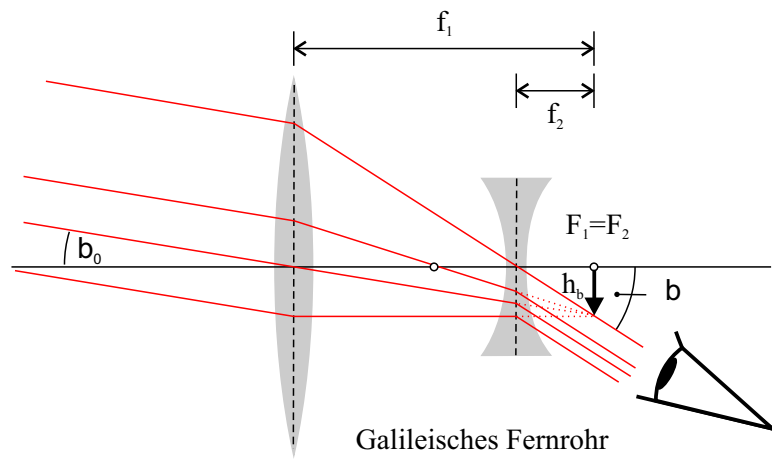


Abbildung 1.32: Strahlengang eines Galileischen Fernrohrs.

2 Die elektromagnetische Theorie des Lichts

In diesem Kapitel wollen wir die Grundlagen der elektromagnetischen Theorie des Lichts entwickeln. Ausgehend von den Maxwell-Gleichungen werden wir Licht als elektromagnetische Welle beschreiben und dessen Ausbreitung in einfachen Medien diskutieren. Daran anschließend werden wir optische Impulse und Strahlen untersuchen. Die typischen optischen Eigenschaften von dielektrischen Materialien und Metallen werden wir dann im Rahmen zweier klassischer Modelle behandeln. Am Ende des Kapitels werden wir Lichtstreuung als Abstrahlung von elektrischen Dipolen diskutieren.

2.1 Maxwell-Gleichungen

Wir wollen im Folgenden elektromagnetische Phänomene in Materie, etwa einem Stück Glas, betrachten. Aus mikroskopischer Sicht ist dies ein hoffnungslos erscheinendes Unterfangen, da wir in einem typischen Festkörper die Wechselwirkung von elektromagnetischen Feldern mit etwa 10^{23} Ladungsträgern pro Kubikzentimeter berücksichtigen müssten. Eine wesentliche Vereinfachung lässt sich erzielen, wenn wir anstatt der räumlich und zeitlich schnell variierenden mikroskopischen elektromagnetischen Felder die entsprechenden gemittelten makroskopischen Größen betrachten. Dieses Vorgehen ermöglicht es uns in der Optik einen Festkörper lokal als homogenes Medium zu betrachten, dessen Eigenschaften durch wenige Materialparameter charakterisiert werden können. Elektromagnetische Phänomene in Materie lassen sich im Rahmen dieser Näherung durch die makroskopischen Maxwell-Gleichungen beschreiben:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varrho(\mathbf{r}, t), \quad (2.1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t), \quad (2.1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \dot{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t). \quad (2.1.4)$$

Weiterhin gilt definitionsgemäß:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t), \quad (2.1.5)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\mu_0} - \mathbf{M}(\mathbf{r}, t). \quad (2.1.6)$$

2 Die elektromagnetische Theorie des Lichts

Im internationalen Einheitensystem haben die hier angegebenen makroskopischen Größen die folgenden Einheiten:

- Elektrische Feldstärke: $[E] = \text{V m}^{-1}$
- Elektrische Flussdichte: $[D] = \text{A s m}^{-2}$
- Magnetische Flussdichte: $[B] = \text{V s m}^{-2}$
- Magnetische Feldstärke: $[H] = \text{A m}^{-1}$
- Freie Stromdichte: $[j] = \text{A m}^{-2}$
- Magnetisierung: $[M] = \text{A m}^{-1}$
- Elektrische Polarisation: $[P] = \text{A s m}^{-2}$
- Freie Ladungsdichte: $[\rho] = \text{A s m}^{-3}$
- Dielektrizitätskonstante des Vakuums: $\epsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12} \text{ A s V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
- Magnetische Permeabilität des Vakuums: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ V s A}^{-1} \text{ m}^{-1}$

Zusätzlich zu den Maxwell-Gleichungen benötigen wir noch eine Beschreibung der materialspezifischen optischen Eigenschaften. Wir wollen hier zunächst die elektrische Polarisation $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ betrachten, die als das Dipolmoment pro Volumen definiert ist. Für kleine elektrische Feldstärken gilt (oftmals):

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^t \chi_e(t-t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt'. \quad (2.1.7)$$

In diesem Ansatz wird die Antwort des Materials auf ein äußeres elektrische Feld durch die elektrische Suszeptibilität $\chi_e(t-t')$ beschrieben. Wir haben hier vereinfachend angenommen, dass $\chi_e(t-t')$ ein Skalar ist und somit $\mathbf{P} \parallel \mathbf{E}$. Diese Annahme gilt z.B. nicht für uniaxiale oder biaxiale Kristalle (siehe Kapitel 4). Im Allgemeinen ist $\hat{\chi}_e(t-t')$ ein Tensor 2. Stufe und $\mathbf{P} \nparallel \mathbf{E}$. Weiterhin können für große elektrische Feldstärken auch Terme $P \propto E^2$, $P \propto E^3$, ... auftreten. Die daraus resultierenden Phänomene werden im Rahmen der nichtlinearen Optik behandelt.

Experimente: Kristall aus Kalkspat, grüner Laserpointer.

Gleichung (2.1.7) kann weiter vereinfacht werden, wenn wir uns auf monochromatische elektrische Felder der Form $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \varphi)$ beschränken. In diesem Fall empfiehlt sich ein Wechsel von der Zeitdomäne in die Frequenzdomäne mittels Fourier-Transformation:

$$\tilde{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt. \quad (2.1.8)$$

Die zugehörige Rücktransformation ist gegeben durch:

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{f}(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (2.1.9)$$

2 Die elektromagnetische Theorie des Lichts

Durch Anwendung des Faltungssatzes der Fourier-Transformation auf $\mathcal{F}\{\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)\}$ erhalten wir:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon_0 \chi_e(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega). \quad (2.1.10)$$

Hier sind $\mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega)$, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ und $\chi_e(\omega)$ die Fouriertransformierten von $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\chi_e(t)$. Da sowohl $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ als auch $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ als Messgrößen reellwertig sind, muss auch $\chi_e(t)$ eine reellwertige Größe sein. Aus $\chi_e^*(t) = \chi_e(t)$ folgt zusammen mit den Eigenschaften der Fouriertransformation, dass $\chi_e(\omega) = \chi_e^*(-\omega)$ gilt.

Gleichung (2.1.5) besitzt in der Frequenzdomäne die folgende, einfache Form:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon_0 \epsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega). \quad (2.1.11)$$

Hier haben wir im letzten Schritt die dielektrische Funktion

$$\epsilon(\omega) = 1 + \chi_e(\omega) \quad (2.1.12)$$

eingeführt.

Analog können wir die Magnetisierung $\mathbf{M}(\mathbf{r}, \omega)$ mit Hilfe der magnetischen Suszeptibilität $\chi_m(\omega)$ schreiben als:

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, \omega) = \chi_m(\omega) \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega). \quad (2.1.13)$$

Gleichung (2.1.6) nimmt damit in der Frequenzdomäne die folgende Form an:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) + \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}, \omega) = \mu_0 \mu(\omega) \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega). \quad (2.1.14)$$

Hierbei ist

$$\mu(\omega) = 1 + \chi_m(\omega) \quad (2.1.15)$$

die sogenannte magnetische Permeabilität.

2.2 Elektromagnetische Wellen

2.2.1 Wellengleichung

Eine wichtige Konsequenz der Maxwell-Gleichungen ist die Existenz von elektromagnetischen Wellen. Zur Ableitung der Wellengleichung gehen wir von den makroskopischen Maxwell-Gleichungen aus. Zunächst wenden wir $\nabla \times$ auf Gleichung (2.1.2) an und erhalten:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (2.2.1)$$

Im nächsten Schritt vertauschen wir die Reihenfolge von $\partial/\partial t$ und $\nabla \times$:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\partial/\partial t (\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)). \quad (2.2.2)$$

Durch Substitution von Gleichung (2.1.6) und (2.1.4) in Gleichung (2.2.2) erhalten wir die Wellengleichung für das elektrische Feld:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) - \mu_0 \nabla \times \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (2.2.3)$$

Anhand einer analogen Ableitung erhalten wir die folgende Wellengleichung für das magnetische Feld:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \nabla \times \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \nabla \times \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}. \quad (2.2.4)$$

Die beiden Wellengleichungen (2.2.3) und (2.2.4) sind unabhängig von den jeweiligen Materialeigenschaften gültig. Die Terme auf den rechten Seiten der beiden Wellengleichungen wirken als Quellen für elektromagnetische Strahlung.

2.2.2 Mathematischer Einschub

Eindimensionale Wellengleichung

Als erstes zeigen wir, dass die eindimensionale homogene Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}. \quad (2.2.5)$$

Lösungen der Form

$$\Psi(x, t) = f(x - vt) \quad (2.2.6)$$

besitzt. Hierbei ist $f(x)$ eine beliebige zweimal differenzierbare Funktion.

Wir berechnen die räumlichen und zeitlichen Ableitungen der Wellenfunktion Ψ . Mit $u_- = x - vt$, erhalten wir:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u_-} \frac{\partial u_-}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u_-} \quad (2.2.7)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = \left[\frac{\partial}{\partial u_-} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial u_-}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial u_-^2} \quad (2.2.8)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u_-} \frac{\partial u_-}{\partial t} = -v \frac{\partial f}{\partial u_-} \quad (2.2.9)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) = \left[\frac{\partial}{\partial u_-} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) \right] \frac{\partial u_-}{\partial t} = -v \left[\frac{\partial}{\partial u_-} \left(-v \frac{\partial f}{\partial u_-} \right) \right] \quad (2.2.10)$$

$$= v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u_-^2} \quad (2.2.11)$$

Der Vergleich zeigt:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (\text{q.e.d.}) \quad (2.2.12)$$

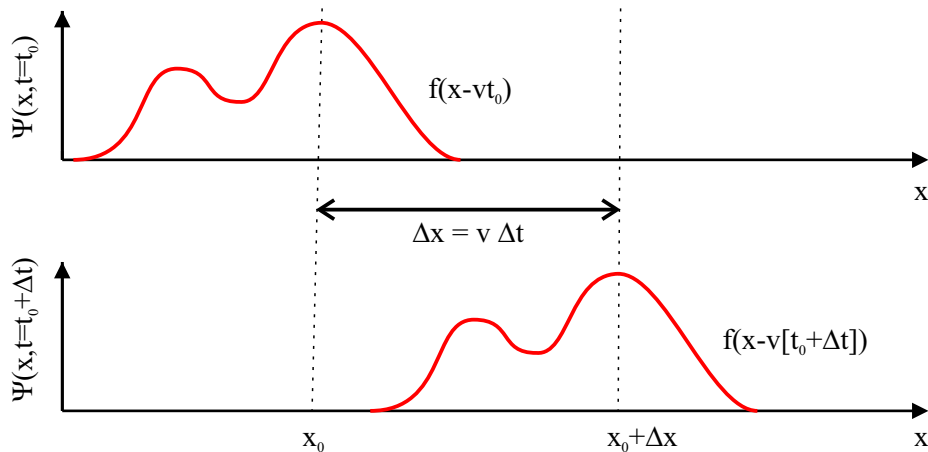


Abbildung 2.1: Eine nach rechts laufende Welle.

Analog lässt sich zeigen, dass $g(x + vt)$ ebenfalls die Gleichung (2.2.5) erfüllt. Die Lösungen der Wellengleichung können wir wie folgt interpretieren:

- $f(x - vt)$ ist eine mit der Geschwindigkeit v nach rechts laufende Welle konstanter Form.
- $g(x + vt)$ ist eine mit der Geschwindigkeit v nach links laufende Welle konstanter Form.

Experiment: Seilwelle.

Da die Wellengleichung (2.2.5) eine lineare Gleichung ist gilt das Superpositionsprinzip: Sind Ψ_1 und Ψ_2 zwei unabhängige Lösungen der Wellengleichung, dann ist auch $(\Psi_1 + \Psi_2)$ eine Lösung. Wellen können also überlagert werden. Die gesamte Wellenfunktion ergibt sich aus der algebraischen Summe aller Wellenfunktionen an einem bestimmten Ort zu einem Zeitpunkt. Das Superpositionsprinzip bildet die Grundlage vieler Wellenphänomene.

Harmonische Wellen

Wir untersuchen im Folgenden harmonische Wellen der Form

$$\Psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \varphi_0). \quad (2.2.13)$$

2 Die elektromagnetische Theorie des Lichts

Hierbei ist

A : Amplitude.

k : Wellenzahl.

ω : Winkelgeschwindigkeit.

φ_0 : Anfangsphase.

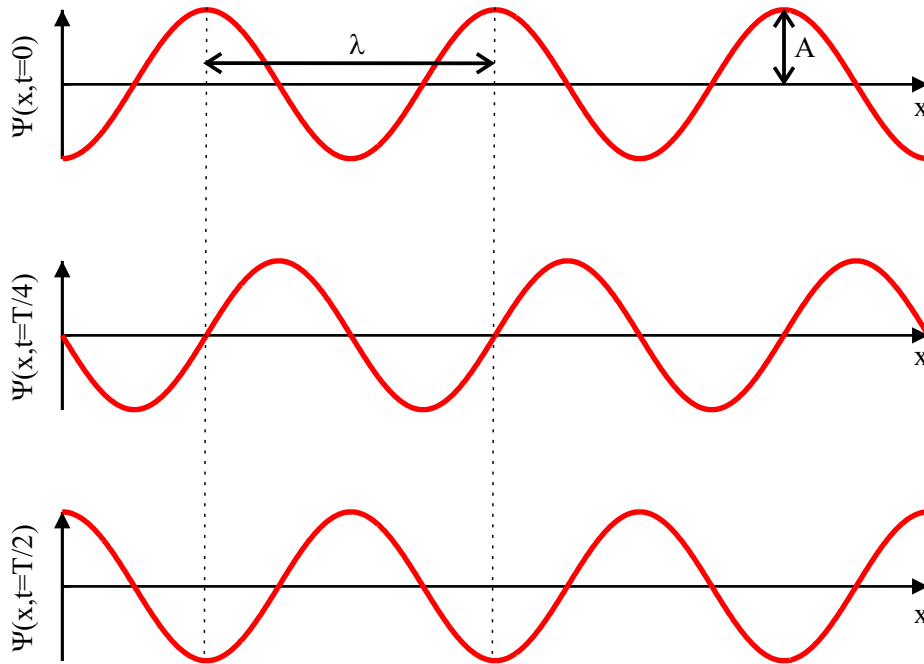


Abbildung 2.2: Eine harmonische Welle.

Einsetzen der Wellenfunktion (2.2.13) in die Wellengleichung (2.2.5) liefert:

$$v = \frac{\omega}{k}. \quad (2.2.14)$$

Harmonische Wellen sind sowohl räumlich als auch zeitlich periodische Funktionen. Die räumliche Periode wird als Wellenlänge λ bezeichnet. Aus $\Psi(x, t) = \Psi(x \pm \lambda, t)$ folgt:

$$k\lambda = 2\pi. \quad (2.2.15)$$

Für die zeitliche Periode T ergibt sich aus $\Psi(x, t) = \Psi(x, t \pm T)$:

$$\omega T = 2\pi. \quad (2.2.16)$$

Die Frequenz der harmonischen Welle ist definiert als:

$$\nu \equiv \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (2.2.17)$$

2 Die elektromagnetische Theorie des Lichts

Die mathematische Behandlung der Wellengleichung vereinfacht sich oftmals durch die formale Einführung einer komplexen Wellenfunktion:

$$\Psi(x, t) = A [\cos(kx - \omega t + \varphi_0) + i \sin(kx - \omega t + \varphi_0)] = \tilde{A} e^{i(kx - \omega t)}. \quad (2.2.18)$$

Hierbei ist $\tilde{A} = A e^{i\varphi_0}$ die komplexe Amplitude. Es ist dabei zu beachten, dass im Rahmen der Elektrodynamik allerdings nur $\Re(\Psi)$ physikalisch relevant ist.

Ebene Wellen

Wir betrachten jetzt die vektorielle, dreidimensionale, homogene Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}. \quad (2.2.19)$$

Ψ ist jetzt ein Vektorfeld. Jede der drei kartesischen Komponenten $\Psi_j, j = x, y, z$ ist eine Lösung der skalaren, dreidimensionalen Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial t^2}. \quad (2.2.20)$$

Ebene Wellen der Form

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{A}} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} = \tilde{\mathbf{A}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (2.2.21)$$

sind Lösungen der vektoriellen, dreidimensionalen, homogenen Wellengleichung. Hier ist $\tilde{\mathbf{A}}$ der komplexwertige, konstante Amplitudenvektor und $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ der Wellenvektor.

Zu jedem beliebigen Zeitpunkt $t = t'$ stehen die Ebenen konstanter Phase $\varphi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t' = \text{const}$ senkrecht zu \mathbf{k} . Die Wellenfunktion ist in einer Ebene konstanter Phase zu einem gegebenen Zeitpunkt konstant. Der Abstand zweier benachbarter Ebenen mit der selben Phase zu einem gegebenen Zeitpunkt definiert die Wellenlänge λ . Die Ebenen konstanter Phase bewegen sich mit der Phasengeschwindigkeit

$$\mathbf{v}_{\text{Phase}} = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} \hat{\mathbf{e}}_k \quad (2.2.22)$$

in die Richtung des Wellenvektors.

2.2.3 Ebene Wellen in Vakuum

Nach diesem mathematischen Einschub wollen wir elektromagnetische Wellen in Vakuum untersuchen. Mit $\mathbf{P} = 0, \mathbf{M} = 0, \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \mathbf{j} = 0, \rho = 0$ sowie der Vektoridentität $\nabla \times \nabla \times = -\nabla^2 + \nabla \nabla \cdot$ vereinfacht sich Gleichung (2.2.3) zu:

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0.} \quad (2.2.23)$$

2 Die elektromagnetische Theorie des Lichts

Wir betrachten im Folgenden harmonische ebene Wellen¹:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (2.2.24)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (2.2.25)$$

mit konstanten Amplitudenvektoren \mathbf{E}_0 und \mathbf{B}_0 . Harmonische ebene Wellen sind eine Idealisierung (unendliche räumliche und zeitliche Ausdehnung der Welle). Sie können aber häufig zur Beschreibung von „einfarbigen“ elektromagnetischen Wellen benutzt werden, die in einem Raumgebiet annähernd konstante Amplitudenvektoren aufweisen.

Einsetzen von $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ in Gleichung (2.2.23) liefert die Vakuum-Dispersionsrelation

$$\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{k}_0 = k_0^2 = \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2}. \quad (2.2.26)$$

Hierbei ist \mathbf{k}_0 der Wellenvektor und c_0 die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}. \quad (2.2.27)$$

Definitionsgemäß gilt: $c_0 = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$.

Die Ebenen konstanter Phase breiten sich mit der Phasengeschwindigkeit

$$\mathbf{v}_{\text{Phase}} = \frac{\omega_0}{|\mathbf{k}_0|} \hat{\mathbf{e}}_k = c_0 \hat{\mathbf{e}}_k \quad (2.2.28)$$

in Richtung $\hat{\mathbf{e}}_k$ (Einheitsvektor parallel zum Wellenvektor \mathbf{k}_0) aus. Der Abstand zweier benachbarter Ebenen mit identischer Phasenlage definiert die Wellenlänge

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}_0|}. \quad (2.2.29)$$

Wellenlänge und Frequenz sind über die Dispersionsrelation miteinander verknüpft:

$$\lambda_0 \nu_0 = c_0. \quad (2.2.30)$$

Beispiel

He-Ne Laser

- Wellenlänge: $\lambda_0 = 632.8 \text{ nm}$.
- Frequenz: $\nu_0 = 473.7 \text{ THz}$.

¹Zur Erinnerung: Physikalisch relevant ist jeweils nur der Realteil der so definierten ebenen Wellen!

2 Die elektromagnetische Theorie des Lichts

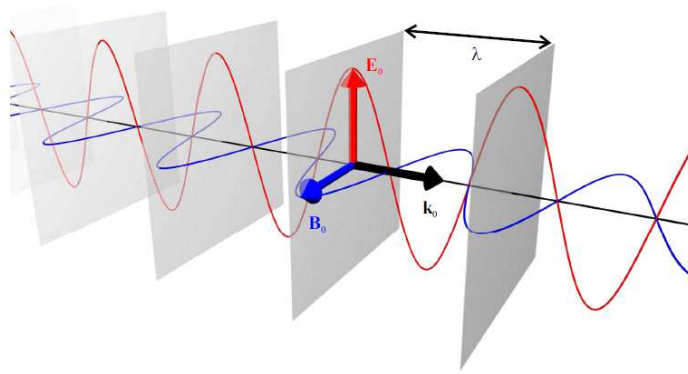


Abbildung 2.3: Ebene elektromagnetische Welle in Vakuum.

Als nächstes wollen wir die relative Orientierung von \mathbf{E}_0 , \mathbf{B}_0 und \mathbf{k}_0 untersuchen. Aus $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0$ folgt:

$$\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{E}_0 = 0. \quad (2.2.31)$$

Der Amplitudenvektor des elektrischen Feldes steht also senkrecht auf dem Wellenvektor. Aus $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$ ergibt sich entsprechend, dass auch der Amplitudenvektor des Magnetfeldes senkrecht zum Wellenvektor orientiert ist. Weiterhin folgt aus $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t)$, dass

$$\mathbf{k}_0 \times \mathbf{E}_0 = \omega \mathbf{B}_0. \quad (2.2.32)$$

Dies können wir zu

$$\mathbf{B}_0 = \frac{1}{\omega} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0) \quad (2.2.33)$$

umformen. Somit steht der Amplitudenvektor der magnetischen Flussdichte auch senkrecht zum Amplitudenvektor der elektrischen Feldstärke. Licht ist in einem isotropen Medium also eine transversale elektromagnetische Welle und die drei Vektoren \mathbf{k}_0 , \mathbf{E}_0 und \mathbf{B}_0 definieren ein rechtshändiges Koordinatensystem.

Die Impedanz² des Vakuums ist definiert als

$$Z_0 = \frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377 \Omega. \quad (2.2.34)$$

Mit Hilfe von Z_0 können wir die Amplitude des Magnetfeldvektors schreiben als:

$$\mathbf{H}_0 = \frac{1}{Z_0} (\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0). \quad (2.2.35)$$

²Wir werden später sehen, dass Unterschiede in der Impedanz zweier Medien zur partiellen Reflexion einer einlaufenden Welle an der Grenzfläche zwischen den Medien führt.

2.2.4 Ebene Wellen in isotropen Medien

Licht ist in Materie keine reine elektromagnetische Welle, sondern ein Mischzustand aus elektromagnetischer Welle und Materialanregung (Polarisation, Magnetisierung und induzierten Ströme). Wir betrachten im Folgenden ein Medium, das durch die folgenden Materialgleichungen charakterisiert wird:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon_0 \epsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = \mu_0 \mu(\omega) \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega), \quad \mathbf{j} = 0, \quad \varrho = 0.$$

Für monochromatische Felder

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad (2.2.36)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \quad (2.2.37)$$

können wir die Wellengleichung durch die Ersetzung $\partial/\partial t \rightarrow -i\omega$ vereinfachen und erhalten die Helmholtz-Gleichung:

$$\left[\nabla^2 + \mu_0 \epsilon_0 \epsilon(\omega) \mu(\omega) \omega^2 \right] \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.2.38)$$

Durch Einsetzen kann sofort bestätigt werden, dass ebene Wellen

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (2.2.39)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \quad (2.2.40)$$

Lösungen der Helmholtz-Gleichung in isotropen Medien darstellen und dass das Medium durch die folgende Dispersionsrelation charakterisiert wird:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \frac{\omega^2}{c_0^2} \epsilon(\omega) \mu(\omega). \quad (2.2.41)$$

Der Wellenvektor \mathbf{k} ist im Medium über die Beziehung

$$\mathbf{k} = n(\omega) \mathbf{k}_0, \quad (2.2.42)$$

mit dem Vakuum-Wellenvektor \mathbf{k}_0 verknüpft. Hierbei haben wir den Brechungsindex $n(\omega)$ definiert als³

$$n(\omega) = \sqrt{\epsilon(\omega) \mu(\omega)}. \quad (2.2.43)$$

Im Allgemeinen sind sowohl der Brechungsindex $n(\omega) = n'(\omega) + i n''(\omega)$ als auch der Wellenvektor $\mathbf{k} = \mathbf{k}' + i \mathbf{k}''$ komplexe Größen. In absorbierenden Medien fällt die Amplitude der Welle exponentiell in der Propagationsrichtung ab:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega t)} e^{-\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r}}, \quad (2.2.44)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega t)} e^{-\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r}}. \quad (2.2.45)$$

³Wir nehmen hier an, dass $\Re(\epsilon) > 0$, $\Re(\mu) > 0$.

Außerdem sind in Medien mit komplexen Brechungsindex das elektrische Feld und die magnetische Flussdichte nicht in Phase (Beweis: Übung). Die Wellenlänge im Medium λ ist definiert als der Abstand zweier aufeinanderfolgender Ebenen mit der selben Phasenlage. Damit gilt:

$$\lambda = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}'|} = \frac{\lambda_0}{|n'(\omega)|}. \quad (2.2.46)$$

Die Phasengeschwindigkeit im Medium ist gegeben durch:

$$|\mathbf{v}_{\text{Phase}}| = \frac{\omega}{|\mathbf{k}'|} = \frac{c_0}{|n'(\omega)|}. \quad (2.2.47)$$

Für die Impedanz des Mediums finden wir:

$$Z(\omega) = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu(\omega)}{\epsilon_0 \epsilon(\omega)}}. \quad (2.2.48)$$

Experiment: Bestimmung des Brechungsindex mit dem Entfernungsmesser.

2.2.5 Energie- und Impulstransport durch elektromagnetische Wellen

Im Folgenden wollen wir den Energietransport durch elektromagnetische Wellen untersuchen. Bevor wir eine theoretisch stringente Behandlung des Problems präsentieren, wollen wir uns zunächst von unserer Anschauung leiten lassen.

Experiment: Energietransport durch Licht.

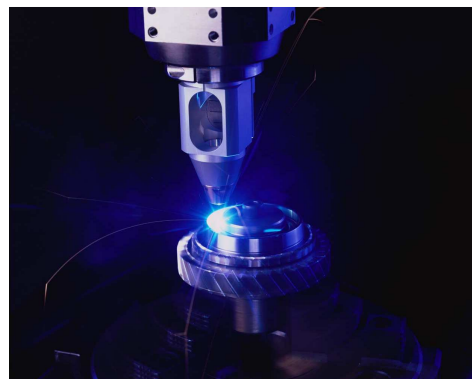


Abbildung 2.4: Intensive Laserstrahlung kann zur Materialbearbeitung verwendet werden. Bildquelle: Trumpf GmbH & Wikipedia.

Anschauliche Betrachtung des Energietransports

In der Physik II-Vorlesung haben wir gelernt, dass in statischen elektrischen und magnetischen Feldern Energie gespeichert ist:

- Energiedichte des elektrischen Feldes (z.B. in einem Kondensator):

$$w_{el} = \frac{1}{2}ED. \quad (2.2.49)$$

- Energiedichte des magnetischen Feldes (z.B. in einer Spule):

$$w_{mag} = \frac{1}{2}HB. \quad (2.2.50)$$

Wir verallgemeinern dies nun auf den dynamischen Fall und nehmen an, dass die Energiedichte einer elektromagnetischen Welle in einem transparenten, nichtdispersiven Medium ($\epsilon = \epsilon'$ und $\mu = \mu'$) durch

$$w_{em}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2}\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad (2.2.51)$$

gegeben ist⁴.

Sichtbares Licht liegt im Frequenzbereich von etwa 380 THz bis 790 THz. Die zugehörige Energiedichte $w_{em}(\mathbf{r}, t)$ ist somit eine zeitlich schnell veränderliche Größe. Wir sind daher im allgemeinen nur am zeitlichen Mittelwert interessiert:

$$\langle w_{em}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T w_{em}(\mathbf{r}, t) dt, \quad (2.2.52)$$

wobei T die Mittelungsdauer ist.

Wir betrachten ab jetzt monochromatisches Licht und wählen als Ansatz für das elektromagnetische Feld eine ebene Welle:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (2.2.53)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (2.2.54)$$

Da im Ausdruck für die Energiedichte Produkte von Feldern auftreten, dürfen wir die komplexen Felder nicht einfach in Gleichung (2.2.51) einsetzen! Eine kurzen Rechnung zeigt (Beweis: Übung), dass für zwei komplexe Vektorfelder $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{a}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$ und $\mathbf{b}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{b}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$ der folgende Zusammenhang gilt:

$$\langle \Re(\mathbf{a}) \cdot \Re(\mathbf{b}) \rangle = \frac{1}{2} \Re(\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{b}_0^*). \quad (2.2.55)$$

⁴Wichtig: Gleichung (2.2.51) ist für dispersive, absorbierende Medien nicht gültig!

2 Die elektromagnetische Theorie des Lichts

Damit können wir den zeitlichen Mittelwert des elektrischen Anteils der Energiedichte ausdrücken als:

$$\begin{aligned}
 \langle w_e \rangle &= \frac{1}{2} \langle \Re [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] \cdot \Re [\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)] \rangle \\
 &= \frac{1}{4} \Re \left[(\mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) \cdot (\epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}_0^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) \right] \\
 &= \frac{1}{4} \epsilon_0 \epsilon |\mathbf{E}_0|^2.
 \end{aligned} \tag{2.2.56}$$

Eine analoge Herleitung liefert mit $\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \omega \mathbf{B}_0$ für den zeitlichen Mittelwert des magnetischen Anteils der Energiedichte:

$$\langle w_m \rangle = \frac{1}{2} \langle \Re [\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] \cdot \Re [\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)] \rangle = \frac{1}{4} \epsilon_0 \epsilon |\mathbf{E}_0|^2. \tag{2.2.57}$$

Im zeitlichen Mittel ist die elektrische Energiedichte gleich der magnetischen Energiedichte. Insgesamt erhalten wir also:

$$\boxed{\langle w_{em} \rangle = \langle w_e \rangle + \langle w_m \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon |\mathbf{E}_0|^2}. \tag{2.2.58}$$

Zur Erinnerung

Die Stromdichte einer mengenartigen Größe gibt an, welche Menge dieser Größe pro Zeiteinheit durch eine Einheitsfläche senkrecht zur Ausbreitungsrichtung fließt.

Dabei gilt:

$$\text{Stromdichte} = \text{Dichte} \cdot \text{Ausbreitungsgeschwindigkeit}. \tag{2.2.59}$$

Beispiel elektrische Stromdichte:

$$j = \rho v \tag{2.2.60}$$

mit der Ladungsdichte ρ und der Ausbreitungsgeschwindigkeit v .

Der Betrag des zeitlichen Mittelwerts der elektromagnetischen Energiestromdichte heißt Intensität I . Für eine ebene Welle in einem nichtdispersiven, transparenten Medium sollte nach den obigen Überlegungen gelten:

$$I = c \langle w_{em} \rangle = \frac{1}{2} c \epsilon_0 \epsilon |\mathbf{E}_0|^2. \tag{2.2.61}$$

Poynting-Theorem

Wir wollen nun den Energietransport durch elektromagnetische Felder theoretisch stringent behandeln. Hierzu betrachten wir zunächst ein Teilchen mit Ladung q und Geschwin-

2 Die elektromagnetische Theorie des Lichts

digkeit \mathbf{v} in einem elektromagnetischen Feld. Auf das Teilchen wirkt die Lorentzkraft:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (2.2.62)$$

Bei der Verschiebung um die Strecke $d\mathbf{r}$ leistet das Feld die Arbeit:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}. \quad (2.2.63)$$

Die zugehörige Leistung ist gegeben durch:

$$\frac{dW}{dt} = q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}. \quad (2.2.64)$$

Für eine kontinuierliche Ladungsverteilung mit Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}, t)$ gilt für die Leistung des elektromagnetischen Feldes im Volumen V entsprechend:

$$\frac{dW_V}{dt} = \int_V \rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)d^3r = \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)d^3r. \quad (2.2.65)$$

Mit Hilfe der Maxwell-Gleichung (2.1.4) finden wir:

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (2.2.66)$$

Weiterhin gilt die Vektoridentität:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}. \quad (2.2.67)$$

Zusammen mit der Maxwell-Gleichung (2.1.2) können wir dies schreiben als:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}. \quad (2.2.68)$$

Wir erhalten damit für die Leistung des elektromagnetischen Feldes im Volumen V :

$$\frac{dW_V}{dt} = \int_V \left[-\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \right] d^3r. \quad (2.2.69)$$

Wir wollen nun annehmen, dass das Medium transparent und nicht dispersiv ist, d.h., die dielektrische Funktion ϵ und die Permeabilität μ sind zeitlich konstant und reell. In diesem Fall gilt:

$$\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}] = \frac{\partial w_{em}}{\partial t}. \quad (2.2.70)$$

Mit Hilfe des Poynting Vektors

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad (2.2.71)$$

2 Die elektromagnetische Theorie des Lichts

und des Satzes von Gauß können wir Gleichung (2.2.69) schreiben als:

$$\frac{dW_V}{dt} = \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) d^3r = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V w_{em}(\mathbf{r}, t) d^3r - \int_{\delta V} \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{A}. \quad (2.2.72)$$

Der erste Term auf der rechten Seite dieser Gleichung kann leicht als die zeitliche Änderung der Energie des elektromagnetischen Feldes im Volumen V identifiziert werden. Der letzte Term beschreibt somit den Energiestrom über die Oberfläche δV aus dem Volumen V . Daher ist $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ die Energiestromdichte des elektromagnetischen Feldes. Die Maßeinheit des Poynting-Vektors ist $[S] = \text{W m}^{-2}$.

Wir interessieren uns wieder für den zeitlichen Mittelwert. Für eine ebene Welle erhalten wir mit $\mathbf{H}_0 = \frac{1}{Z}(\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0)$:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle &= \frac{1}{2} \Re \left[\mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \times \mathbf{H}_0^* e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \Re \left[\mathbf{E}_0 \times \frac{1}{Z} (\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0^*) \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{Z} |\mathbf{E}_0|^2 \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}} \\ &= \frac{1}{2} c \epsilon_0 \epsilon |\mathbf{E}_0|^2 \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (2.2.73)$$

Der Vergleich mit Gleichung (2.2.61) zeigt:

$$|\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle| = I. \quad (2.2.74)$$

Beispiel

Ein grüner Laser-Pointer mit 1 mW mittlerer Leistung fällt auf eine Fläche von 1 mm^2 .
 Intensität: $I = 1 \text{ mW/mm}^2 = 1 \text{ kW/m}^2$
 Elektrische Feldstärke: $E_0 \approx 870 \text{ V/m}$.

Für dispersive und absorbierende Medien liefert Gleichung (2.2.51) nicht den korrekten Ausdruck für die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes. Dessen ungeachtet wird der Energietransport einer transversal elektromagnetischen Welle weiterhin durch den Poynting-Vektor $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ beschrieben. Für den zeitlichen Mittelwert $\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle$ erhalten wir für ein Medium mit komplexen Materialparametern:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle &= \frac{1}{2} \Re \left[\mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} e^{-\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r}} \times \mathbf{H}_0^* e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} e^{-\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \Re \left[\mathbf{E}_0 \times \frac{1}{Z^*} (\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0^*) \right] e^{-2\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\Re(Z)}{|Z|^2} |\mathbf{E}_0|^2 \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}} e^{-2\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (2.2.75)$$

Man beobachtet, dass in passiven Medien die Lichtintensität in Ausbreitungsrichtung kleiner wird. Dieser Umstand wird durch das Beersche Absorptionsgesetz

$$I(L) = I(0)e^{-\alpha L} \quad (2.2.76)$$

beschrieben. Hierbei ist α der sogenannte Absorptionskoeffizient und L die im Medium zurückgelegte Strecke. Aus dem Vergleich mit Gleichung (2.2.75) finden wir

$$\alpha = \frac{4\pi n''}{\lambda_0}. \quad (2.2.77)$$

Strahlungsdruck

Einer elektromagnetischen Welle kann nicht nur eine Energiestromdichte, sondern auch eine Impulsdichte zugeordnet werden. Bei der Absorption oder Reflexion einer Lichtwelle wirkt daher auf das absorbierende bzw. reflektierende Material ein Strahlungsdruck. Dieser Strahlungsdruck ist einer der Gründe für die Krümmung des Schweifs von Kometen.

Mit Hilfe der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung für ein masseloses Teilchen

$$p = \frac{E}{c} \quad (2.2.78)$$

können wir die Impulsdichte \mathbf{g} einer elektromagnetischen Welle angeben als:

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{S}}{c^2} = \epsilon_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \quad (2.2.79)$$

Der Strahlungsdruck P_{st} ergibt sich aus dem Impulsübertrag pro Zeit- und Flächeneinheit. Bei vollständiger Absorption einer elektromagnetischen Welle bei senkrechtem Lichteinfall finden wir:

$$P_{\text{st}} = c|\mathbf{g}| = \frac{|\mathbf{S}|}{c}. \quad (2.2.80)$$

2.3 Optische Impulse

Bisher haben wir optische Wellen mit zeitlich konstanter Amplitude betrachtet. In diesem Abschnitt wollen wir nun optische Impulse untersuchen, bei denen die Lichtintensität nur in einem bestimmten Zeitintervall einen nennenswerten Betrag aufweist. Solche optische Impulse spielen beispielsweise für die Datenübertragung eine wichtige Rolle. Im einfachsten Fall, dem sogenannten On-Off-Keying, wird ein Bit an Information als das Vorhandensein eines Impulses („1“) oder das Fehlen eines Impulses („0“) in einer Impulssequenz übertragen.

2.3.1 Schwebung

Experiment: Schwebung.

Wir betrachten jetzt zuerst die Überlagerung von zwei gleich polarisierten ebenen Wellen mit Frequenzen ω_1 und ω_2 . Die gemeinsame Ausbreitungsrichtung sei \hat{e}_z :

$$E(z, t) = E_0 [\cos(k_1 z - \omega_1 t) + \cos(k_2 z - \omega_2 t)]. \quad (2.3.1)$$

Mit der Hilfe der Beziehung $\cos(a) + \cos(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$ ergibt sich

$$E(z, t) = 2E_0 \cos\left(\frac{(k_1 + k_2)z - (\omega_1 + \omega_2)t}{2}\right) \cos\left(\frac{(k_1 - k_2)z - (\omega_1 - \omega_2)t}{2}\right). \quad (2.3.2)$$

Wir definieren nun die mittlere Frequenz $\bar{\omega}$, die mittlere Wellenzahl \bar{k} , die Modulationsfrequenz ω_m und die Modulationswellenzahl k_m als:

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad (2.3.3)$$

$$\bar{k} = \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad (2.3.4)$$

$$\omega_m = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}, \quad (2.3.5)$$

$$k_m = \frac{k_1 - k_2}{2}. \quad (2.3.6)$$

Mit diesen Größen lässt sich die elektrische Feldstärke schreiben als:

$$E(z, t) = 2E_0 \cos(k_m z - \omega_m t) \cos(\bar{k}z - \bar{\omega}t). \quad (2.3.7)$$

Wir können die Überlagerung der beiden Wellen als eine ebene Welle mit mittlerer Frequenz $\bar{\omega}$ und mittlerer Wellenzahl \bar{k} auffassen, deren Amplitude sich zeitlich und räumlich mit der Modulationsfrequenz ω_m und der Modulationswellenzahl k_m ändert.

Als nächstes wollen wir die Überlagerung von $2N+1$ harmonischen Wellen mit Frequenzen $\nu_m = \nu_0 + m\Delta\nu, m = -N, -N+1, \dots, N-1, N$ betrachten. Wir nehmen an, dass alle Wellen die gleiche zeitlich konstante Amplitude \mathbf{E}_0 besitzen und zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Maximum aufweisen. Nach einer kurzen Rechnung (Beweis: Übung) findet man für die Intensität:

$$I(t) = I_0 \frac{\sin^2 [(2N+1)\pi\Delta\nu t]}{\sin^2 [\pi\Delta\nu t]}, \quad (2.3.8)$$

wobei I_0 die Intensität einer einzelnen Welle ist. In Abbildung 2.6 ist der zeitliche Verlauf der Intensität für die Überlagerung von 11 Wellen exemplarisch dargestellt. Der hier betrachtete Fall zeigt, dass durch die phasenstarre Überlagerung von Wellen mit konstanter Frequenzdifferenz $\Delta\nu$ ein optischer Impulszug erzeugt werden kann. Dieses Prinzip wird in einem modengekoppelten Laser zur Erzeugung von ultrakurzen optischen Impulsen genutzt.

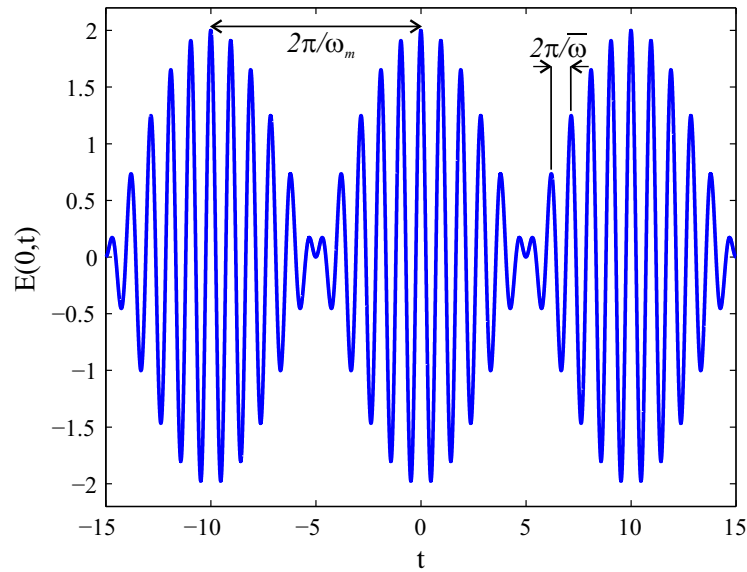


Abbildung 2.5: Überlagerung zweier harmonischer Wellen mit unterschiedlichen Frequenzen.

2.3.2 Optische Impulse in dispersiven Medien

Bevor wir die Ausbreitung eines optischen Impulses in einem Medium untersuchen, betrachten wir zunächst dessen elektrisches Feld an einem Ort $z = z_0$:

$$\mathbf{E}(z_0, t) = \mathbf{A}(z_0, t) e^{-i\omega_0 t}. \quad (2.3.9)$$

Hierbei charakterisiert $\mathbf{A}(z_0, t)$ die zeitlich langsam veränderliche Einhüllende des Impulses, die sogenannte Enveloppe, und $e^{-i\omega_0 t}$ die zeitlich rasch veränderliche Trägerwelle. Wir untersuchen nun aus welchen Frequenzkomponenten der Impuls zusammengesetzt ist. Zu diesem Zweck stellen wir $\mathbf{E}(z_0, t)$ mit Hilfe der Fouriertransformation als Überlagerung von ebenen Wellen mit unterschiedlichen Frequenzen dar:

$$\mathbf{E}(z_0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(z_0, \omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (2.3.10)$$

Hierbei gibt $\mathbf{E}(z_0, \omega)$ die Amplitude und Phase der spektralen Komponente des Wellenpakets mit der Frequenz ω an. Der Vergleich von Gleichung (2.3.9) und (2.3.10) liefert nach einer kurzen Rechnung:

$$\mathbf{E}(z_0, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(z_0, t) e^{i(\omega - \omega_0)t} dt, \quad (2.3.11)$$

$$\mathbf{A}(z_0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(z_0, \omega) e^{-i(\omega - \omega_0)t} d\omega. \quad (2.3.12)$$

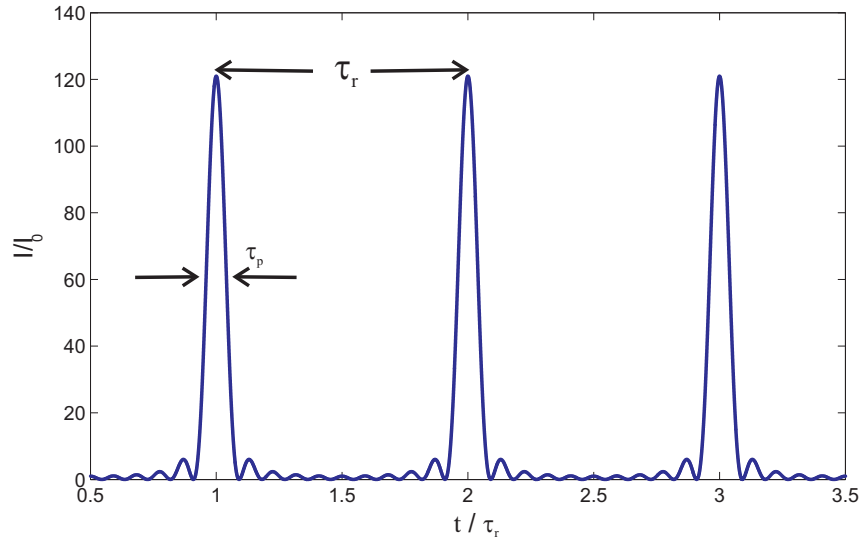


Abbildung 2.6: Intensität eines Pulszuges der aus der Überlagerung von $N = 11$ Wellen mit Frequenzdifferenz $\Delta\nu$ entsteht.

Beispiel: Gaußscher Impuls

Wir betrachten in diesem Beispiel einen optischen Impuls mit Gaußförmiger Evelope und Trägerfrequenz ω_0 . Am Ort $z = z_0$ sei das elektrische Feld des Impulses gegeben durch:

$$\mathbf{E}(z_0, t) = \mathbf{E}_0 \exp\left(-\frac{2 \ln(2)t^2}{\tau_p^2}\right) \exp(-i\omega_0 t). \quad (2.3.13)$$

Die Intensität des Impulses berechnet sich zu

$$I(z_0, t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 c_0 |\mathbf{E}_0|^2 e^{-\frac{4 \ln(2)t^2}{\tau_p^2}}. \quad (2.3.14)$$

Für $t = \pm\tau_p/2$ nimmt die Intensität den Wert $I(\pm\tau_p/2) = \frac{I(0)}{2}$ an. Wir können somit τ_p als die zeitliche Halbwertsbreite (Englisch: full width at half maximum - FWHM) des Impulses identifizieren. Die Fourier-Transformation von $\mathbf{E}(z_0, t)$ ergibt:

$$\mathbf{E}(z_0, \omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2 \ln(2)}} \tau_p \mathbf{E}_0 e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2 \tau_p^2}{8 \ln(2)}}. \quad (2.3.15)$$

Für das Spektrum des Pulses gilt somit

$$S(z_0, \omega) \propto |\mathbf{E}_0|^2 \exp\left(-\frac{(\omega - \omega_0)^2 \tau_p^2}{4 \ln(2)}\right). \quad (2.3.16)$$

Die spektrale Halbwertsbreite $\Delta\omega$ folgt aus der Bedingung $S(0, \omega_0 \pm \Delta\omega/2) = S(0, \omega_0)/2$. Offensichtlich gilt $\Delta\omega = \frac{4 \ln(2)}{\tau_p}$. Für den Gaußschen Impuls gilt damit das Zeit-Bandbreite-Produkt

$$\tau_p \Delta\omega = 4 \ln(2). \quad (2.3.17)$$

Pulslänge und spektrale Breite sind also nicht unabhängig voneinander.

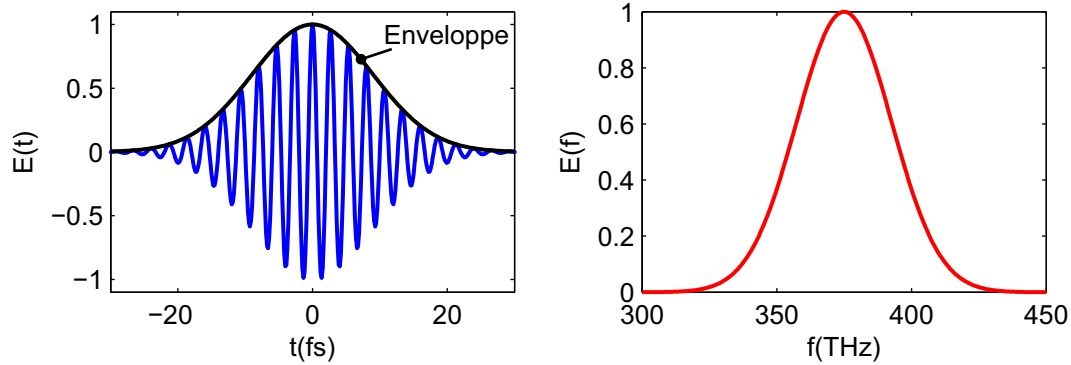


Abbildung 2.7: Gaußscher Impuls. Links: Zeitdomäne. Rechts: Frequenzdomäne

Als nächstes untersuchen wir die Propagation eines optischen Impulses in einem dispersiven Medium. Für jede spektrale Komponente des Impulses gilt nach einer Propagationsstrecke z :

$$\mathbf{E}(z, \omega) = \mathbf{E}(0, \omega) e^{ik(\omega)z} \quad \text{mit} \quad k(\omega) = n(\omega) \omega / c_0. \quad (2.3.18)$$

Damit gilt für den gesamten Impuls:

$$\mathbf{E}(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(0, \omega) e^{ik(\omega)z} e^{-i\omega t} d\omega. \quad (2.3.19)$$

Für die weitere Betrachtung entwickeln wir $k(\omega)$ in eine Taylorreihe um die Trägerfrequenz ω_0 :

$$k(\omega) = k(\omega_0) + \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2k}{d\omega^2} \right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 + \dots \quad (2.3.20)$$

Mit den Abkürzungen

$$\beta_0 = k(\omega_0), \quad \beta' = \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0}, \quad \beta'' = \left(\frac{d^2k}{d\omega^2} \right)_{\omega_0} \quad (2.3.21)$$

erhalten wir:

$$e^{ik(\omega)z} = e^{i\beta_0 z} e^{i\beta'(\omega - \omega_0)z} e^{i\frac{1}{2}\beta''(\omega - \omega_0)^2 z}. \quad (2.3.22)$$

Wir betrachten zunächst den Fall, dass die Dispersion des Materials nicht sehr stark ist, so dass wir $\beta'' = 0$ annehmen können. Durch das Einsetzen von $e^{ik(\omega)z} = e^{i\beta_0 z} e^{i\beta'(\omega - \omega_0)z}$

2 Die elektromagnetische Theorie des Lichts

in Gleichung (2.3.19) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(0, \omega) e^{i\beta_0 z} e^{i\beta'(\omega-\omega_0)z} e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \frac{e^{i(\beta_0-\beta'\omega_0)z}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(0, \omega) e^{-i\omega(t-\beta'z)} d\omega. \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

Wir definieren nun den Gruppenindex

$$n_g(\omega) = n(\omega) + \omega \frac{dn(\omega)}{d\omega}, \quad (2.3.24)$$

die Gruppengeschwindigkeit

$$v_g = \frac{1}{\beta'} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c_0}{n_g(\omega)} \quad (2.3.25)$$

und die Gruppenverzögerung

$$\tau_g = \frac{z}{v_g}. \quad (2.3.26)$$

Mit deren Hilfe können wir Gleichung (2.3.23) schreiben als:

$$\mathbf{E}(z, t) = e^{i(\beta_0-\omega_0/v_g)z} \mathbf{E}(0, t - \tau_g). \quad (2.3.27)$$

Der Impuls bewegt sich also ohne Formänderung der Enveloppe mit der Gruppengeschwindigkeit v_g durch das Medium.

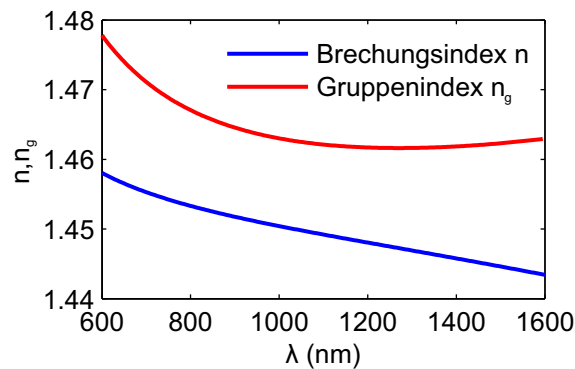


Abbildung 2.8: Brechungsindex und Gruppenindex von Quarzglas.

Ausblick:

Die Gruppengeschwindigkeit kann in Medien mit anomaler Dispersion ($\frac{dn(\omega)}{d\omega} < 0$) größer als c_0 und sogar negativ werden. Eine negative Gruppengeschwindigkeit entspricht der (scheinbar) bizarren Situation, dass das Maximum des transmittierten optischen Impulses an der Rückseite des Mediums erscheint bevor das Maximum des einlaufenden Pulses die Vorderseite erreicht! Warum dies weder die Kausalität noch der Relativitätstheorie widerspricht ist sehr schön im folgenden Artikel erklärt: D. J. Gauthier, R. Boyd, *Fast Light, Slow Light and Optical Precursors: What Does it All Mean?* Photonics Spectra, January 2007, Seite 82-90.

Jetzt berücksichtigen wir den Fall $\beta'' \neq 0$. Hierzu betrachten wir den Unterschied in der Gruppenverzögerung für zwei Frequenzen ω_1 und ω_0

$$\Delta\tau_g = (\beta'(\omega_1) - \beta'(\omega_0)) z \quad (2.3.28)$$

$$\approx \left(\beta'(\omega_0) + \frac{d\beta'}{d\omega} (\omega_1 - \omega_0) - \beta'(\omega_0) \right) z \quad (2.3.29)$$

$$= z\beta'' (\omega_1 - \omega_0). \quad (2.3.30)$$

Für $\beta'' \neq 0$ werden die einzelnen spektralen Komponenten des Impulses unterschiedlich verzögert, so dass der Impuls bei der Propagation durch das Medium auseinanderläuft. Dieser Effekt wird Gruppengeschwindigkeitsdispersion genannt (GVD: group velocity dispersion).

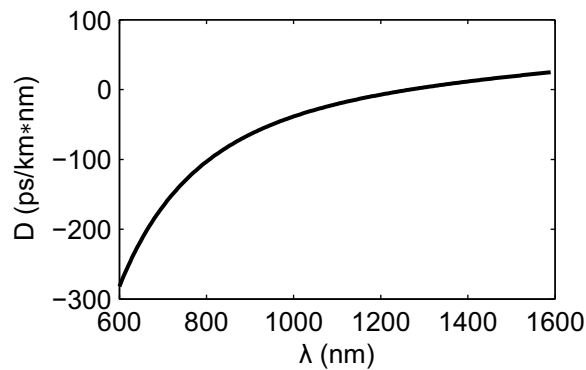


Abbildung 2.9: Dispersionskoeffizient von Quarzglas.

Wir definieren nun den Dispersionskoeffizient:

$$D(\lambda) = -\frac{2\pi c_0}{\lambda^2} \beta''. \quad (2.3.31)$$

Damit können wir den Unterschied in der Gruppenverzögerung schreiben als:

$$\Delta\tau_g = zD(\lambda)\Delta\lambda \quad \text{mit} \quad \Delta\lambda = -\frac{\Delta\omega\lambda^2}{2\pi c_0}. \quad (2.3.32)$$

2 Die elektromagnetische Theorie des Lichts

Anschaulich lässt sich dieser Zusammenhang wie folgt interpretieren: Ein Impuls mit einer spektralen Bandbreite $\Delta\lambda$ wird nach der Propagationsstrecke z in einem Medium mit Dispersionskoeffizient $D(\lambda)$ um $\Delta\tau_g$ gedehnt.

Beispiel: Propagation Gaußscher Impulse in BK7-Glas.

- Trägerfrequenz: $\omega_0 = 2\pi \times 375 \text{ THz} \Rightarrow$ Zentralwellenlänge: $\lambda_0 = 800 \text{ nm}$.
- Propagationslänge: $z = 1 \text{ mm}$.
- Brechungsindex: $n(800 \text{ nm}) = 1.51$.
- Gruppenindex: $n_g(800 \text{ nm}) = 1.527$.
 \Rightarrow Gruppenverzögerung $\tau_g = 5090 \text{ fs}$.
- Dispersionskoeffizient: $D(800 \text{ nm}) = -128 \text{ ps/km} \times \text{nm}$
- Impulslänge: $\tau_p = 10 \text{ fs}$.
 \Rightarrow Breite des Spektrums: $\Delta\lambda = 94 \text{ nm}$.
 $\Rightarrow \Delta\tau_g \approx 12 \text{ fs}$.
- Impulslänge: $\tau_p = 100 \text{ fs}$.
 \Rightarrow Breite des Spektrums: $\Delta\lambda = 9.4 \text{ nm}$.
 $\Rightarrow \Delta\tau_g \approx 1.2 \text{ fs}$.

Der 10-fs-Impuls ist nach 1 mm BK7 Glas bereits deutlich verformt! Beim 100-fs-Impuls ergibt sich dagegen nur eine geringe zeitliche Verbreiterung.

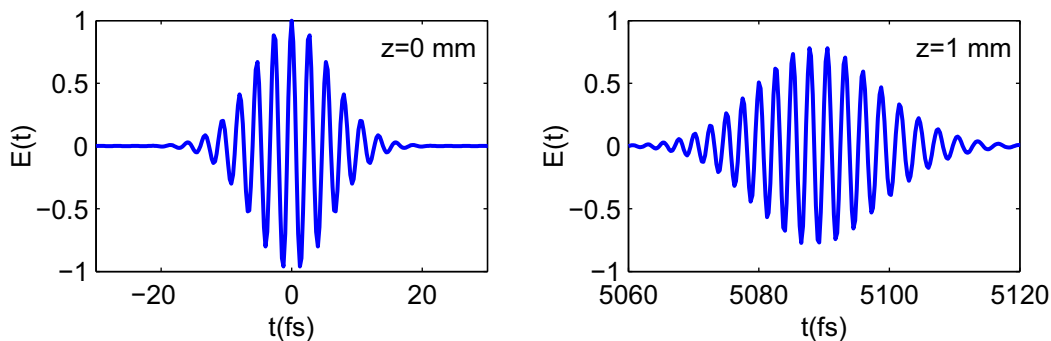


Abbildung 2.10: Links: Gaußscher Impuls mit $\tau_p = 10 \text{ fs}$ und $\omega_0 = 2\pi \times 375 \text{ THz}$. Rechts: Impuls nach der Propagation durch 1 mm BK7-Glas.

2.4 Gauß-Strahlen

2.4.1 Paraxiale Helmholtz-Gleichung

Wir wollen nun an die geometrische Optik anknüpfen und die Ausbreitung eines gebündelten Lichtstrahls unter wellenoptischen Gesichtspunkten untersuchen. Wir betrachten hierzu einen paraxialen Strahl der Form:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) e^{i(kz - \omega t)}. \quad (2.4.1)$$

Wir gehen davon aus, dass sich die Enveloppe $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ nur langsam in Ausbreitungsrichtung (z -Achse) ändert, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\partial \mathbf{A} / \partial z \ll k \mathbf{A}, \quad (2.4.2)$$

$$\partial^2 \mathbf{A} / \partial z^2 \ll k^2 \mathbf{A}. \quad (2.4.3)$$

In dieser Näherung gleichen die paraxialen Strahlen *lokal* einer ebenen Welle. Durch Einsetzen von $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ in die Helmholtz-Gleichung und bei Vernachlässigung von $\partial^2 \mathbf{A} / \partial z^2$ gegenüber von $k \partial \mathbf{A} / \partial z$ und $k^2 \mathbf{A}$ erhält man die sogenannte paraxiale Helmholtz-Gleichung:

$$\nabla_t^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) + i2k \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r})}{\partial z} = 0 \quad \text{mit} \quad \nabla_t^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2. \quad (2.4.4)$$

2.4.2 Eigenschaften Gaußscher Strahlen

Das Strahlprofil vieler Laserstrahlen wird in sehr guter Näherung durch einen sogenannten Gauß-Strahl beschrieben:

$$\mathbf{A}(\rho, z) = \mathbf{A}_0 \frac{W_0}{W(z)} \exp\left(-\frac{\rho^2}{W^2(z)}\right) \exp\left(ik \frac{\rho^2}{2R(z)}\right) \exp(-i\eta(z)) \quad (2.4.5)$$

mit

$$W_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}}, \quad (2.4.6)$$

$$W(z) = W_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2}, \quad (2.4.7)$$

$$R(z) = z \left(1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right), \quad (2.4.8)$$

$$\eta(z) = \arctan(z/z_0). \quad (2.4.9)$$

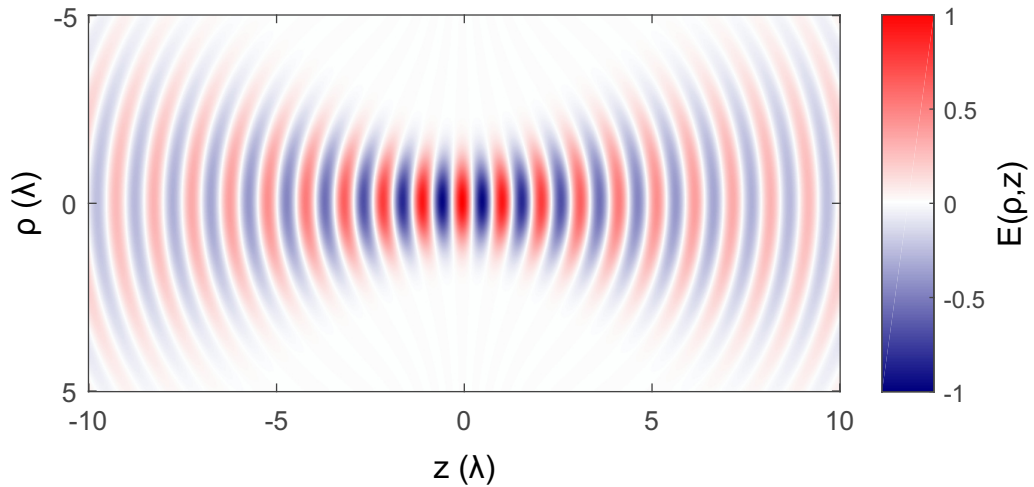


Abbildung 2.11: Elektrisches Feld eines Gauß-Strahls.

Die Eigenschaften des Gauß-Strahls werden durch die Wellenlänge λ und die sogenannte Rayleigh-Länge z_0 festgelegt. Durch Einsetzen kann man leicht zeigen, dass Gauß-Strahlen Lösungen⁵ der paraxialen Helmholtz-Gleichung sind.

Radiales und axiales Intensitätsprofil

Die Intensität eines Gauß-Strahls lautet als Funktion von z und ρ :

$$I(\rho, z) = \frac{c\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}(\rho, z)|^2 = I_0 \left(\frac{W_0}{W(z)} \right)^2 \exp\left(-2 \frac{\rho^2}{W^2(z)}\right) \quad (2.4.10)$$

mit

$$I_0 = \frac{c\epsilon_0}{2} |\mathbf{A}_0|^2. \quad (2.4.11)$$

Der Name Gauß-Strahl nimmt Bezug auf das radiale Intensitätsprofil. Für jeden z -Wert ist die Funktion $I(\rho, z = \text{const})$ eine Gauß-Funktion des radialen Abstands ρ mit Intensitätsmaximum auf der optischen Achse $\rho = 0$.

Das axiale Intensitätsprofil eines Gauß-Strahls ist gegeben durch:

$$I(\rho = 0, z) = I_0 \left(\frac{W_0}{W(z)} \right)^2 = \frac{I_0}{1 + (z/z_0)^2}. \quad (2.4.12)$$

Es weist bei $z = 0$ ein Maximum mit $I(0, 0) = I_0$ auf. Nach einer Rayleigh-Länge $z = \pm z_0$ fällt die Intensität auf der optische Achse auf die Hälfte des Maximalwerts ab.

⁵Gauß-Strahlen sind allerdings keine exakte Lösung der Wellengleichung!

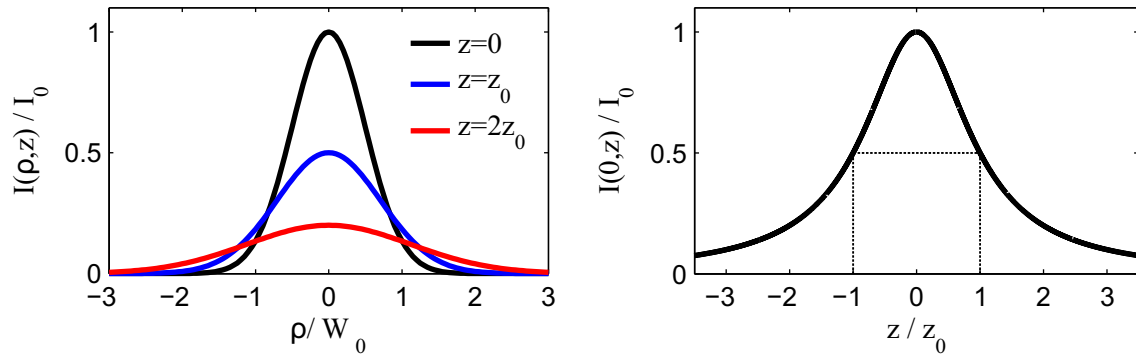


Abbildung 2.12: Links: Radiales Intensitätsprofil eines Gauß-Strahls für verschiedene Werte von z . Rechts: Axiales Intensitätsprofil eines Gauß-Strahls.

Strahlradius und Divergenz

Die Gesamtleistung des Gauß-Strahls kann durch Integration von Gleichung (2.4.10) über eine beliebige Querschnittsfläche berechnet werden:

$$P_{\text{total}} = \int_0^{\infty} I(\rho, z) 2\pi\rho d\rho = \frac{1}{2}I_0 (\pi W_0^2). \quad (2.4.13)$$

Eine um die optische Achse zentrierte Kreisscheibe mit Radius ρ_0 enthält den Anteil

$$\frac{P(\rho_0)}{P_{\text{total}}} = \frac{\int_0^{\rho_0} I(\rho, z) 2\pi\rho d\rho}{\int_0^{\infty} I(\rho, z) 2\pi\rho d\rho} = 1 - \exp\left(-2\frac{\rho_0^2}{W^2(z)}\right) \quad (2.4.14)$$

der gesamten Leistung.

Der Strahlradius $W(z)$ ist ein übliches Maß für die Charakterisierung der Breite eines Gauß-Strahls. Im Abstand $W(z)$ von der Achse ist die Intensität um den Faktor $1/e^2$ kleiner als auf der Achse (siehe Abbildung 2.13). Eine Kreisscheibe mit Radius $\rho_0 = W(z)$ enthält $\sim 87\%$ der Gesamtleistung.

Nach Gleichung (2.4.7) ist $W(z)$ definiert als:

$$W(z) = W_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2}. \quad (2.4.15)$$

Hierbei ist

$$W_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}} \quad (2.4.16)$$

der minimale Strahlradius an der Strahl-Taille. Für $z \gg z_0$ nimmt der Strahlradius linear mit z zu:

$$W(z) \approx W_0 \frac{z}{z_0} = \theta_{\text{div}} z. \quad (2.4.17)$$

2 Die elektromagnetische Theorie des Lichts

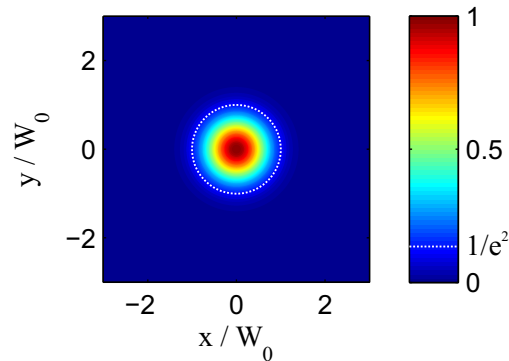


Abbildung 2.13: Intensitätsprofil eines Gauß-Strahls an der Taille des Strahls ($z = 0$). Die gepunktete weiße Linie ist ein Kreis mit Radius $W(z = 0) = W_0$.

Hierbei ist die Divergenz θ_{div} gegeben durch (siehe Abbildung 2.14):

$$\theta_{\text{div}} = \frac{W_0}{z_0} = \frac{\lambda}{\pi W_0}. \quad (2.4.18)$$

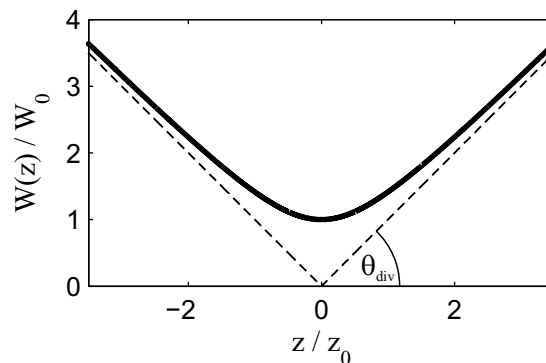


Abbildung 2.14: Strahlradius $W(z)$ und Divergenz θ_{div} eines Gauß-Strahls.

Beispiel

Ein HeNe Laser emittiert Laserstrahlung mit einer Wellenlänge $\lambda = 632 \text{ nm}$ und einer Strahldivergenz $\theta_{\text{div}} = 0.75 \text{ mrad}$.

⇒ Tailenradius: $W_0 = \lambda / (\pi \theta_{\text{div}}) = 0.270 \text{ mm}$.

⇒ Rayleigh-Länge: $z_0 = W_0^2 \pi / \lambda = 35 \text{ cm}$.

⇒ Strahldurchmesser in 100 m: $W(100 \text{ m}) = 7.5 \text{ cm}$.

Gouy-Phase und Krümmungsradius

Experiment: Gouy-Phase.

2 Die elektromagnetische Theorie des Lichts

Die Phase des elektrischen Feldes eines Gauß-Strahls ist gegeben durch:

$$\varphi(\rho, z) = kz - \eta(z) + \frac{k\rho^2}{2R(z)}. \quad (2.4.19)$$

Hierbei ist

$$\eta(z) = \arctan(z/z_0) \quad (2.4.20)$$

die sogenannte Gouy-Phase. Auf der optischen Achse ($\rho = 0$) vereinfacht sich Gleichung (2.4.19) zu

$$\varphi(0, z) = kz - \eta(z). \quad (2.4.21)$$

Die Gouy-Phase $\eta(z)$ beschreibt eine zusätzliche Retardierung des Gauß-Strahls im Vergleich zu einer ebenen Welle (kz). Diese Retardierung nimmt Werte zwischen $-\pi/2$ für $z = -\infty$ und $\pi/2$ für $z = \infty$ an.

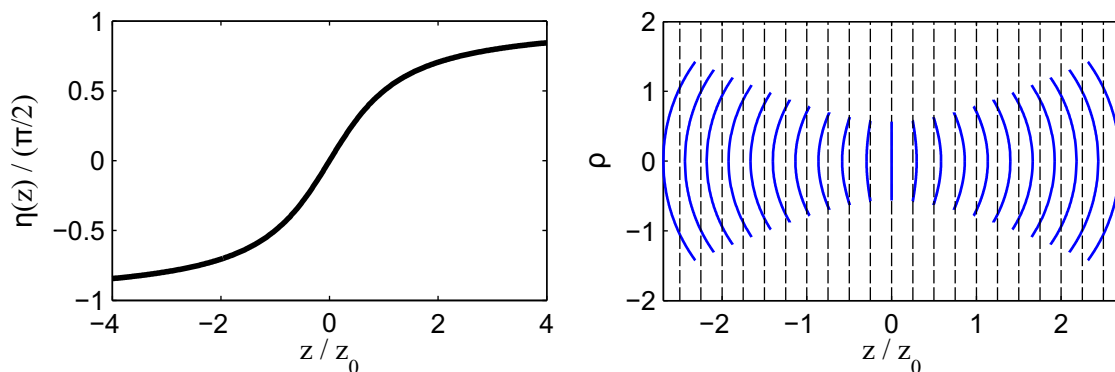


Abbildung 2.15: Links: Gouy-Phase als Funktion der axialen Position z . Rechts: Wellenfronten eines Gauß-Strahls (blaue Kurven) und einer ebenen Welle (schwarze gepunktete Linien). Zwischen zwei Wellenfronten ändert sich die Phase jeweils um $\pi/2$.

Die Wellenfronten eines Gauß-Strahls erfüllen die Bedingung

$$kz - \eta(z) + \frac{k\rho^2}{2R(z)} = 2\pi p, \quad (2.4.22)$$

wobei $R(z)$ der sogenannte Krümmungsradius und p eine Konstante ist. In der Nähe der Strahltaile ($z = 0$) sind die Wellenfronten fast eben und R strebt gegen unendlich. Für große z wächst der Krümmungsradius $R(z)$ linear an und die Wellenfronten gleichen denen einer Kugelwelle.

2.4.3 Fokussierung Gaußscher Strahlen

Im Folgenden wollen wir die Wirkung einer dünnen Linse mit Brennweite f auf einen Gauß-Strahl untersuchen. Wir nehmen an, dass sich die Linse in der Taillenebene ($z = 0$) befindet.

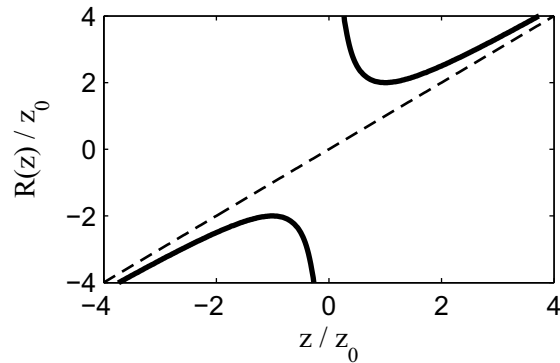


Abbildung 2.16: Krümmungsradius eines Gauß-Strahls (durchgezogene Kurve) und einer Kugelwelle (gestrichelte Linie).

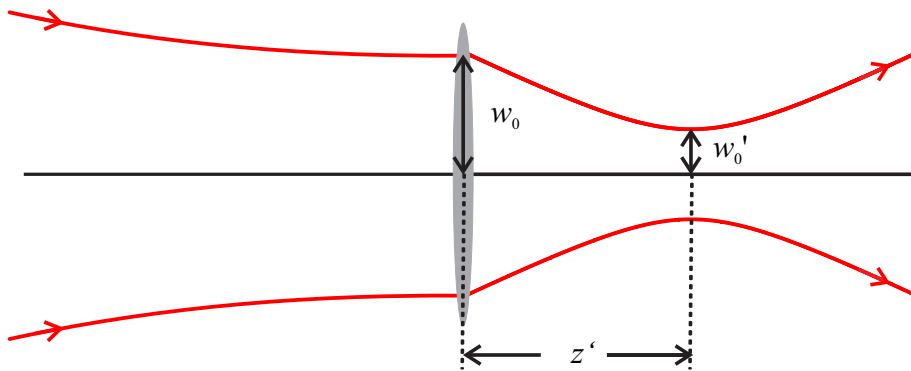


Abbildung 2.17: Fokussierung eines kollimierten Gauß-Strahls mit einer dünnen Linse .

Der Gauß-Strahl wird direkt vor der Linse durch die Parameter $W(0) = W_0$ und $R = \infty$ beschrieben. Beim Durchgang durch die Linse ändert sich der Strahlradius nicht (siehe Abbildung 2.17). Der neue Krümmungsradius direkt hinter der Linse ist $R' = -f$.

Eine kurze Rechnung zeigt (Beweis: Übung), dass sich die neue Strahltaile im Abstand

$$|z'| = \frac{f}{1 + (\lambda f / \pi W_0^2)^2} \quad (2.4.23)$$

hinter der Linse befindet. Der zugehörige Strahlradius in der Taillenebene ist gegeben durch

$$W'_0 = \frac{W_0}{\sqrt{1 + (\pi W_0^2 / \lambda f)^2}}. \quad (2.4.24)$$

Für $z_0 \gg f$, vereinfacht sich die letzte Gleichung zu

$$W'_0 \approx \frac{\lambda}{\pi W_0} f. \quad (2.4.25)$$

Um einen möglichst kleinen Strahlradius W'_0 zu erzielen, muss die Strahltaile des einlaufenden Strahls die Apertur der Linse (Durchmesser: D) vollständig ausfüllen. Mit $W_0 = D/2$ erhalten wir:

$$W'_{0,min} \approx \frac{2}{\pi} \lambda F_{\#}, \quad (2.4.26)$$

mit der Blendenzahl

$$F_{\#} = \frac{f}{D}. \quad (2.4.27)$$

Beispiel

Ein HeNe-Laser (Wellenlänge $\lambda = 632 \text{ nm}$) leuchtet eine Linse mit einem Durchmesser $D = 2.5 \text{ cm}$ und einer Brennweite $f = 5 \text{ cm}$ voll aus.

Strahldurchmesser im Fokus: $2W'_{0,min} \approx \frac{4}{\pi} \lambda F_{\#} = 1.6 \text{ }\mu\text{m}$.

2.5 Klassische Dispersionstheorie

In diesem Abschnitt wollen wir Modelle diskutieren, mit deren Hilfe wir die optischen Eigenschaften von dielektrischen Materialien und Metallen verstehen können. Hierbei werden wir uns auf eine klassische Beschreibung der dielektrischen Funktionen beschränken. Da alle bekannten natürlichen Substanzen bei optischen Frequenzen eine praktisch verschwindende magnetische Antwort aufweisen, können wir in exzellenter Näherung die magnetische Permeabilität $\mu = 1$ setzen; die Abweichungen liegen in der Größenordnung von 10^{-4} .

Beim Durchgang einer elektromagnetischen Welle durch ein Medium wird dessen Ladungsverteilung gestört. Hierbei werden elektrische Dipolmomente erzeugt, die ihrerseits das Feld im Medium modifizieren. Das Dipolmoment pro Volumen im Medium bezeichnen wir als elektrische Polarisation \mathbf{P} . Für kleine elektrische Feldstärken \mathbf{E} beobachtet man üblicherweise einen linearen Zusammenhang:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon_0 \chi_e(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega). \quad (2.5.1)$$

Drei verschiedene Prozesse liefern wesentliche Beiträge zur elektrischen Polarisation:

- **Orientierungspolarisation:** Dieser Prozess ist für Medien, die aus Molekülen mit einem permanenten elektrischen Dipolmoment (z. B. Wasser) bestehen, bei relativ niedrigen Frequenzen relevant. Durch ein äußeres elektrisches Feld können die Moleküle zumindest teilweise ausgerichtet werden, so dass eine makroskopische elektrische Polarisation entsteht. Aufgrund ihrer relativ hohen Trägheit können die Moleküle dem äußeren elektrischen Feld aber nur bis zu einer bestimmten Grenzfrequenz folgen. Im Fall von Wasser beträgt diese etwa 10 GHz. Bei höheren Frequenzen liefert die Orientierungspolarisation keinen wesentlichen Beitrag.

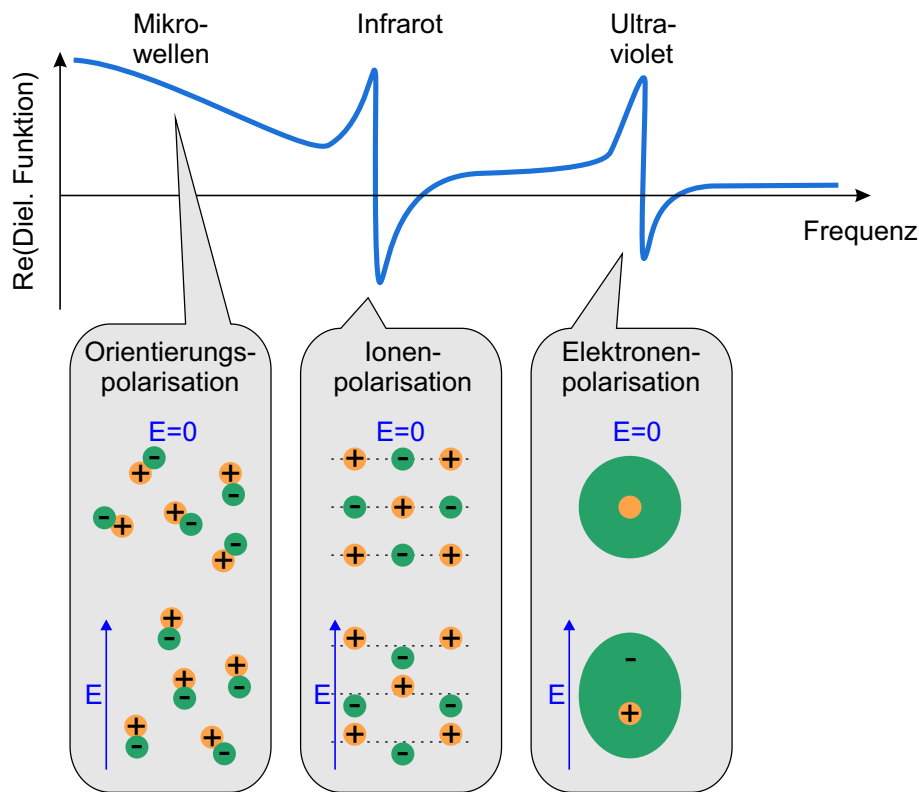


Abbildung 2.18: Schematischer Verlauf der dielektrischen Funktion $\epsilon(\omega)$.

- **Ionenpolarisation:** In Ionen-Kristallen (z.B. NaCl) können die positiv geladenen Anionen durch ein äußeres elektrisches Feld gegen die negativ geladenen Kationen verschoben werden. Hieraus resultiert eine elektrische Polarisation. Die Ionenpolarisation spielt insbesondere im infraroten Spektralbereich eine wichtige Rolle. Für höhere Frequenzen können die Ionen aufgrund ihrer hohen Masse dem äußeren Feld dagegen nicht mehr folgen.
- **Elektronenpolarisation:** Ein äußeres elektrisches Feld kann den Ladungsschwerpunkt der negativ geladenen Elektronenhülle eines Atoms gegenüber dem positiv geladenen Atomkern auslenken. Hieraus resultiert ein Dipolmoment. Dieser Prozess ist maßgeblich für die optischen Eigenschaften im sichtbaren Spektralbereich und wird in den Abschnitten 2.5.1 und 2.5.2 genauer untersucht.

2.5.1 Das Lorentz-Oszillator Modell

Zunächst betrachten wir das Lorentz-Oszillator Modell zur Beschreibung der optischen Eigenschaften von dielektrischen Materialien, wie z.B. Glas. Dieses Modell beruht auf den folgenden Annahmen:

2 Die elektromagnetische Theorie des Lichts

- Die Elektronenhülle eines Atoms kann durch das äußere Feld aus der Gleichgewichtslage ($\mathbf{x} = 0$) ausgelenkt werden.
- Das äußere Feld ist sehr klein im Vergleich zum inneratomaren Feld. Die Elektronen werden nur geringfügig aus der Gleichgewichtslage ausgelenkt und wir können daher ein harmonisches Potential annehmen. Die rücktreibende Kraft auf die Elektronen ist aus diesem Grund proportional zur Auslenkung \mathbf{x} .
- Die Wechselwirkung zwischen den Atomen wird vernachlässigt.
- Der Atomkern ist aufgrund seiner großen Masse unbeweglich.

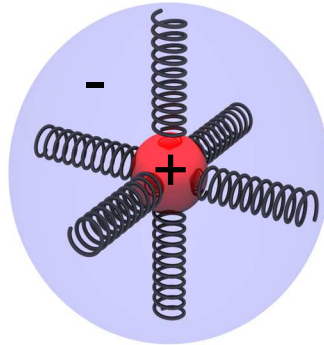


Abbildung 2.19: Lorentz-Oszillator Modell: Die Atomhülle ist durch harmonische Kräfte (Federn) an den Kern gebunden.

Diese Annahmen führen auf die folgende, klassische Bewegungsgleichung (getriebener harmonischer Oszillator):

$$m\ddot{\mathbf{x}} + \gamma m\dot{\mathbf{x}} + m\omega_e^2 \mathbf{x} = q\mathbf{E}(t), \quad (2.5.2)$$

wobei m die Masse der Elektronenhülle und q deren Ladung ist. γ ist eine phänomenologisch eingeführte Dämpfungskonstante und ω_e ist die Eigenfrequenz des Oszillators. Für ein elektrisches Feld mit harmonischer Zeitabhängigkeit $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$ können wir die Bewegungsgleichung im eingeschwungenen Fall leicht mit dem Ansatz

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 e^{-i\omega t} \quad (2.5.3)$$

lösen. Durch Einsetzen in Gleichung (2.5.2) erhalten wir:

$$\mathbf{x}(t) = \frac{q}{m} \left(\frac{1}{\omega_e^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \right) \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}. \quad (2.5.4)$$

Mit der erzwungenen Schwingung der Elektronenhülle relativ zum Atomkern ist ein elektrisches Dipolmoment verknüpft:

$$\mathbf{p}(t) = q\mathbf{x}(t) = \frac{q^2}{m} \left(\frac{1}{\omega_e^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \right) \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}. \quad (2.5.5)$$

2 Die elektromagnetische Theorie des Lichts

Wir führen nun die elektrische Polarisierbarkeit

$$\alpha = \frac{q^2}{m\epsilon_0} \left(\frac{1}{\omega_e^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \right) \quad (2.5.6)$$

als Maß für die Verschiebbarkeit der Ladungsschwerpunkte im Atom durch ein äußeres Feld ein. Der Zusammenhang zwischen dem Dipolmoment und dem treibenden Feld lautet damit

$$\mathbf{p}(t) = \epsilon_0 \alpha \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}. \quad (2.5.7)$$

Die elektrische Polarisation für N Atome pro Einheitsvolumen ist gegeben durch

$$\mathbf{P}(t) = N\mathbf{p}(t). \quad (2.5.8)$$

Durch den Vergleich mit der Materialgleichung (2.1.10) erhalten wir die dielektrische Funktion des Lorentz-Oszillator Modells:

$$\epsilon_{\text{LO}}(\omega) = 1 + \frac{f}{\omega_e^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad (2.5.9)$$

mit

$$f = \frac{Nq^2}{m\epsilon_0}. \quad (2.5.10)$$

Auflösen nach Real- und Imaginärteil ergibt:

$$\epsilon_{\text{LO}}(\omega) = 1 + \frac{f(\omega_e^2 - \omega^2)}{(\omega_e^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} + i \frac{f\omega\gamma}{(\omega_e^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}. \quad (2.5.11)$$

Der zugehörige Brechungsindex ist gegeben durch

$$n_{\text{LO}} = \sqrt{\epsilon_{\text{LO}}}. \quad (2.5.12)$$

Das Lorentz-Oszillator Modell lässt sich einfach für den Fall erweitern, dass mehrere Resonanzen im relevanten Frequenzbereich liegen:

$$\epsilon_{\text{LO}}(\omega) = 1 + \sum_j \frac{f_j}{\omega_{e,j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega} \quad (2.5.13)$$

Die Resonanzen aufgrund der elektronischen Polarisierbarkeit vieler optischer Gläser befinden sich im ultravioletten Spektralbereich. In dem für uns relevanten sichtbaren Spektralbereich ($\omega < \omega_e$) sollte nach dem Lorentz-Oszillator Modell der Realteil des Brechungsindex $\Re(n)$ mit der Frequenz zunehmen (normale Dispersion). Weiterhin erwartet man nur eine geringe Absorption für sichtbares Licht. Diese Vorhersagen werden durch das Experiment bestätigt.

Experiment: Dispersion mit einem Prisma.

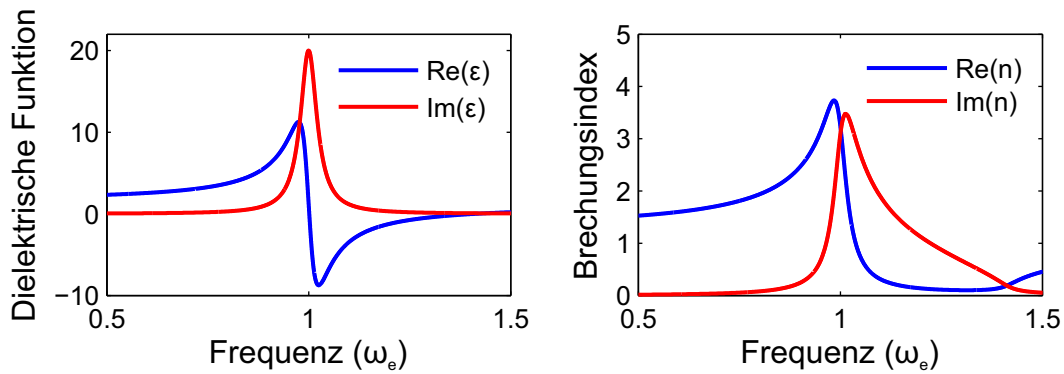


Abbildung 2.20: Dielektrische Funktion und Brechungsindex nach dem Lorentz-Oszillator Modell.

2.5.2 Das Drude Modell

Die optischen Eigenschaften von Metallen können im Rahmen des Drude-Modells verstanden werden. Wir gehen hierbei von folgenden Annahmen aus:

- Die Leitungsbandelektronen bilden ein freies Elektronengas.
- Die Atomrümpfe wirken als homogener, positiv geladener Hintergrund.
- Die Leitungsbandelektronen können durch ein äußeres Feld beschleunigt werden.

Die klassische Bewegungsgleichung für ein Leitungsbandelektron in einem äußeren Feld mit harmonischer Zeitabhängigkeit lautet:

$$m\ddot{\mathbf{x}} + \gamma m\dot{\mathbf{x}} = -e\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}. \quad (2.5.14)$$

Dies ist formal die Bewegungsgleichung des Lorentz-Oszillators mit $\omega_e = 0$. Die dielektrische Funktion des Drude-Modell lautet daher:

$$\epsilon_D(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega} \quad (2.5.15)$$

mit der Plasmafrequenz

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}}. \quad (2.5.16)$$

Auflösen nach Real- und Imaginärteil ergibt:

$$\epsilon_D(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2} + \frac{i\omega_p^2\gamma}{\omega^3 + \gamma^2\omega}. \quad (2.5.17)$$

Der zugehörige Brechungsindex folgt aus

$$n_D(\omega) = \sqrt{\epsilon_D(\omega)}. \quad (2.5.18)$$

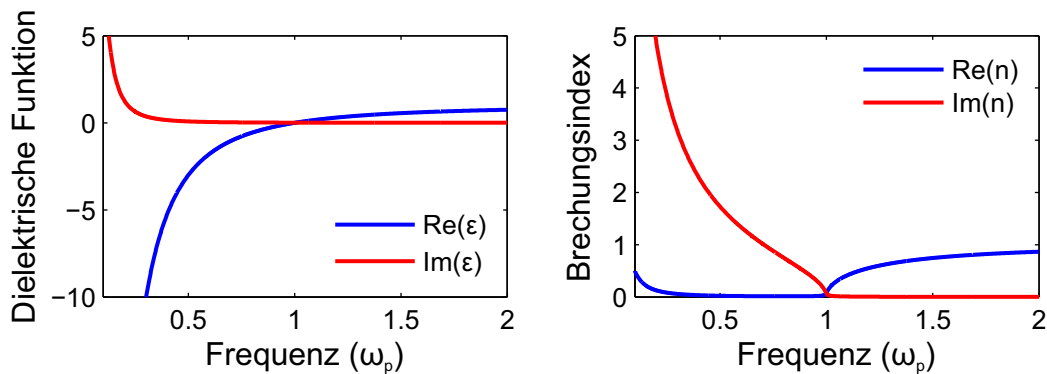


Abbildung 2.21: Dielektrische Funktion und Brechungsindex nach dem Drude-Modell.

Für die meisten Metalle liegt die Plasmafrequenz tief im ultravioletten Spektralbereich. Laut Abbildung 2.21 (b) wird der Brechungsindex im Drude-Modell unterhalb von ω_p durch den Imaginärteil dominiert, d.h., $\Im(n) \gg \Re(n)$. Sichtbares Licht kann sich daher in Metallen nicht ausbreiten. Die typische Eindringtiefe ($1/e$ -Wert der Intensität) ist geringer als 20 nm! Wir werden im nächsten Kapitel sehen, dass diese Eigenschaft nicht im Widerspruch zum hohen Reflexionsvermögen von Metallen steht, sondern dieses sogar bedingt.

Beispiel: Gold

Wir wollen in diesem Beispiel die Dichte der Leitungsbandelektronen N und die Plasmafrequenz ω_p für Gold bestimmen. Die Anzahl der Gold-Atome pro Kubikzentimeter kann mit Hilfe der Dichte ρ_m und der Masse eines Gold-Atoms A (Atommassen werden häufig in u angegeben. Hierbei gilt: $1u = 1.6605 \times 10^{-24}$ g) berechnet werden:

$$N_{\text{Au}} = \frac{\rho_m}{A}. \quad (2.5.19)$$

Mit $\rho_m = 19.3 \text{ g/cm}^3$ und $A = 196.97 \text{ u}$ finden wir $N_{\text{Au}} = 5.9 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}$. Da jedes Gold-Atom mit einem Valenzelektron zum Elektronengas beiträgt, ist die Dichte der Leitungselektronen $N = 5.9 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}$. Mit der Elementarladung $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$ und der Elektronenmasse $m = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ berechnet sich die zugehörige Plasmafrequenz nach Gleichung (2.5.16) zu $\omega_p = 1.368 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}$. Dies entspricht einer Wellenlänge in Vakuum von $\lambda_p = 137.6 \text{ nm}$ (UV-Bereich).

Das einfache Drude Modell erklärt nicht die optischen Eigenschaften der Edelmetalle Gold und Kupfer im sichtbaren Spektralbereich. Die charakteristische gelbliche bzw. rötliche Färbung dieser beiden Metalle (siehe Abbildung 2.22) kann auf sogenannte Interband-Übergänge zurückgeführt werden, die im blau-grünen Teil des Spektrums für erhöhte Absorption sorgen. Diese Interband-Übergänge lassen sich phänomenologisch durch das

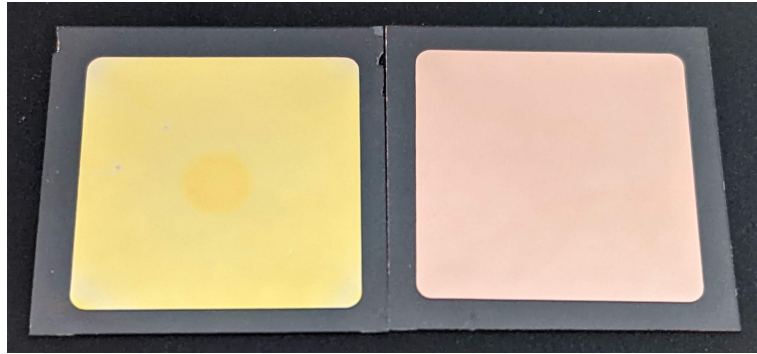


Abbildung 2.22: Glassubstrate bedampft mit Gold (links) und Kupfer (rechts).

Hinzufügen von Lorentz-Termen zur dielektrischen Funktion berücksichtigen:

$$\epsilon_{\text{DL}}(\omega) = \epsilon_{\infty} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma_D\omega} + \sum_j \frac{f_j}{\omega_{e,j}^2 - \omega^2 - i\gamma_{L,j}\omega} \quad (2.5.20)$$

2.5.3 Ausblick: Nichtlineare Optik

Im Folgenden betrachten wir eine Erweiterung des Lorentz-Oszillator-Modells, die es uns erlaubt die nichtlinearen Eigenschaften von dielektrischen Materialien ohne Inversions-Symmetrie zu verstehen. Hierzu betrachten wir ein Potential der Form

$$U_{\text{AO}}(x) = \frac{1}{2}m_e\omega_e^2x^2 + \frac{1}{3}m_eax^3. \quad (2.5.21)$$

Der erste Term entspricht gerade dem harmonischen Potential des Lorentz-Oszillator-Modells während der zweite Term eine (kleine) Abweichung hiervon beschreibt.

Die Bewegungsgleichung für den anharmonischen Oszillator lautet:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_e^2x + ax^2 = -qE(t)/m_e. \quad (2.5.22)$$

Wir betrachten jetzt eine harmonische Welle mit Kreisfrequenz ω :

$$E(t) = E_0e^{-i\omega t} + c.c. \quad (2.5.23)$$

Wir nehmen an, dass die Bedingung $\omega_e^2x \gg ax^2$ erfüllt ist. In diesem Fall können wir die Bewegungsgleichung (2.5.22) mit Hilfe einer Störungsrechnung lösen. Hierzu ersetzen wir $E(t)$ durch $\xi E(t)$, wobei $\xi \in [0, 1]$ der Störungsparameter ist:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_e^2x + ax^2 = -\xi qE(t)/m_e. \quad (2.5.24)$$

Als nächstes suchen wir eine Lösung, die als Potenzreihe in ξ geschrieben werden kann:

$$x = \xi x^{(1)} + \xi^2 x^{(2)} + \xi^3 x^{(3)} + \dots \quad (2.5.25)$$

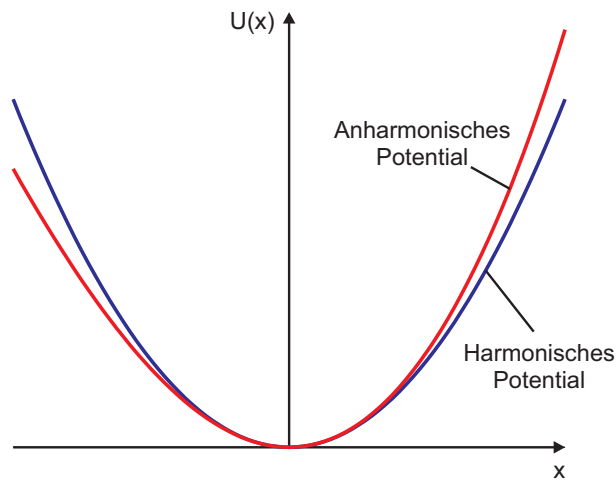


Abbildung 2.23: Vergleich zwischen einem harmonischen Potential und einem anharmonischen Potential.

Nach dem Einsetzen von x in die Bewegungsgleichung sortieren wir nach Ordnungen des Störungsparameters ξ :

$$\mathcal{O}(\xi) : \ddot{x}^{(1)} + 2\gamma\dot{x}^{(1)} + \omega_e^2 x^{(1)} = -qE(t)/m_e \quad (2.5.26)$$

$$\mathcal{O}(\xi^2) : \ddot{x}^{(2)} + 2\gamma\dot{x}^{(2)} + \omega_e^2 x^{(2)} + a [x^{(1)}]^2 = 0 \quad (2.5.27)$$

$$\mathcal{O}(\xi^3) : \ddot{x}^{(3)} + 2\gamma\dot{x}^{(3)} + \omega_e^2 x^{(3)} + 2ax^{(1)}x^{(2)} = 0 \quad (2.5.28)$$

...

In linearer Ordnung $\mathcal{O}(\xi)$, erhalten wir wieder die Bewegungsgleichung des Lorentz-Oszillator-Modells mit der bekannten Lösung :

$$x^{(1)}(t) = x^{(1)}(\omega)e^{-i\omega t} + c.c., \quad (2.5.29)$$

mit

$$x^{(1)}(\omega) = \frac{-q}{m_e} \frac{E_0}{D(\omega)} \quad (2.5.30)$$

und

$$D(\omega) = \omega_e^2 - \omega^2 - 2i\omega\gamma. \quad (2.5.31)$$

Die zugehörige lineare Suszeptibilität lautet (siehe Abschnitt 2.5.1):

$$\chi^{(1)}(\omega) = \frac{Nq^2/m_e}{\epsilon_0 D(\omega)}. \quad (2.5.32)$$

2 Die elektromagnetische Theorie des Lichts

In zweiter Ordnung $\mathcal{O}(\xi^2)$ wirkt $[x^{(1)}(t)]^2$ in Gleichung (2.5.27) als "treibende Kraft" mit Frequenzkomponenten $\pm 2\omega$ und 0 . Wir betrachten zunächst die Komponente, die mit der Frequenz 2ω oszilliert:

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\gamma\dot{x}^{(2)} + \omega_e^2 x^{(2)} = -\frac{a(qE_0/m_e)^2 e^{-i2\omega t}}{D^2(\omega)}. \quad (2.5.33)$$

Dies ist die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators mit treibender Kraft $-\frac{a(qE_0/m_e)^2 e^{-i2\omega t}}{D^2(\omega)}$. Die eingeschwingene Lösung können wir angeben als

$$x^{(2)}(t) = x^{(2)}(2\omega)e^{-i2\omega t} + c.c. \quad (2.5.34)$$

mit

$$x^{(2)}(2\omega) = \frac{-a(q/m_e)^2 E_0^2}{D(2\omega)D^2(\omega)}. \quad (2.5.35)$$

Die zugehörige Suszeptibilität zweiter Ordnung lautet somit

$$\chi^{(2)}(2\omega, \omega, \omega) = \frac{Na(q^3/m_e^2)}{\epsilon_0 D(2\omega)D^2(\omega)} \quad (2.5.36)$$

$$= \frac{\epsilon_0^2 m_e a}{N^2 q^3} \chi^{(1)}(2\omega) [\chi^{(1)}(\omega)]^2. \quad (2.5.37)$$

Für den Beitrag bei $\omega = 0$ findet man nach einer kurzen Rechnung:

$$\chi^{(2)}(0, \omega, -\omega) = 2\frac{\epsilon_0^2 m_e a}{N^2 q^3} \chi^{(1)}(0) \chi^{(1)}(\omega) \chi^{(1)}(-\omega). \quad (2.5.38)$$

Die höheren Ordnungen können wir dann iterativ berechnen. Beispielsweise erhalten wir die dritte Ordnung $x^{(3)}(t)$, indem wir $x^{(1)}(t)$ und $x^{(2)}(t)$ in Gleichung(2.5.28) $[\mathcal{O}(\xi^3)]$ einsetzen. Mit Hilfe der zugehörigen Suszeptibilitäten können wir die Polarisation P als Potenzreihe in E schreiben⁶ :

$$P(t) = \epsilon_0 [\chi^{(1)} E(t) + \chi^{(2)} E^2(t) + \chi^{(3)} E^3(t) + \dots] \quad (2.5.39)$$

Der erste Term ist gerade die bekannte lineare Polarisation:

$$P_L(t) = \epsilon_0 \chi^{(1)} E(t). \quad (2.5.40)$$

Die weiteren Terme fassen wir zur nichtlinearen Polarisation zusammen:

$$P_{NL}(t) = \epsilon_0 [\chi^{(2)} E^2(t) + \chi^{(3)} E^3(t) + \dots]. \quad (2.5.41)$$

⁶Zur Vereinfachung vernachlässigen wir hier den Vektor-Charakter des elektrischen Feldes.

2 Die elektromagnetische Theorie des Lichts

Damit können wir die Wellengleichung schreiben als

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P_L}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 P_{NL}}{\partial t^2} \quad (2.5.42)$$

$$\Rightarrow \nabla^2 E - \frac{n^2}{c_0^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P_{NL}}{\partial t^2} \quad (2.5.43)$$

Die nichtlineare Polarisation wirkt als Quell-Term auf der rechten Seite der Wellengleichung. Sie ist für die Erzeugung neuer Frequenzkomponenten verantwortlich. Ein bekanntes Beispiel ist die Frequenzverdopplung (Second harmonic generation: SHG) in einem nichtlinearen Kristall, die etwa bei grünen Laserpointern verwendet wird.

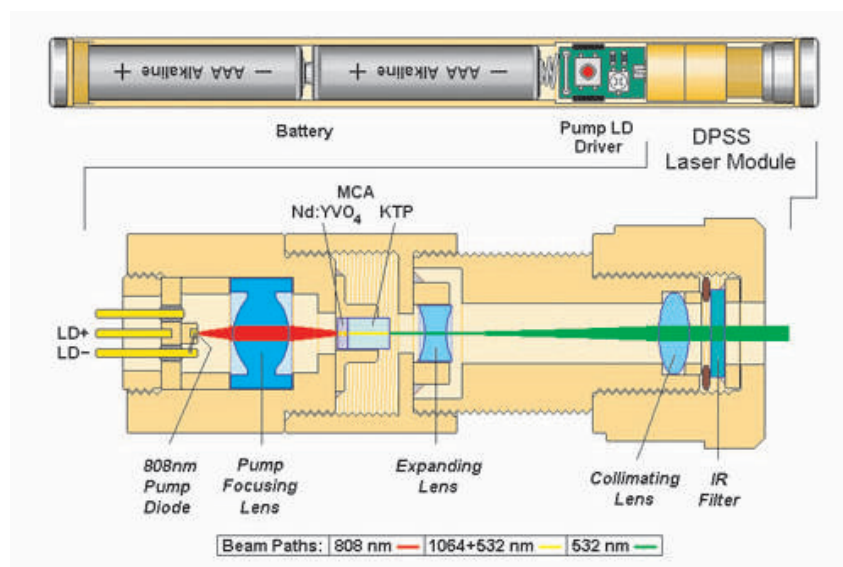


Abbildung 2.24: Schema eines grünen Laserpointers. Die Frequenzverdopplung findet in einem nichtlinearen Kaliumtitanylphosphat (KTP) - Kristall statt. Quelle: Wikipedia.

2.6 Lichtstreuung

Experiment: Streuung eines Laserstrahls an Wasserdampf.

In der Physik bezeichnet man die Ablenkung eines einlaufenden Teilchens oder einer einlaufenden Welle durch die Wechselwirkung mit einem Objekt als Streuung. Auch in der Optik spielen Streuprozesse eine wichtige Rolle. Beispielsweise wäre der Himmel selbst tagsüber schwarz, wenn das einfallende Sonnenlicht nicht mit den Molekülen der Atmosphäre wechselwirken und dadurch gestreut würde.

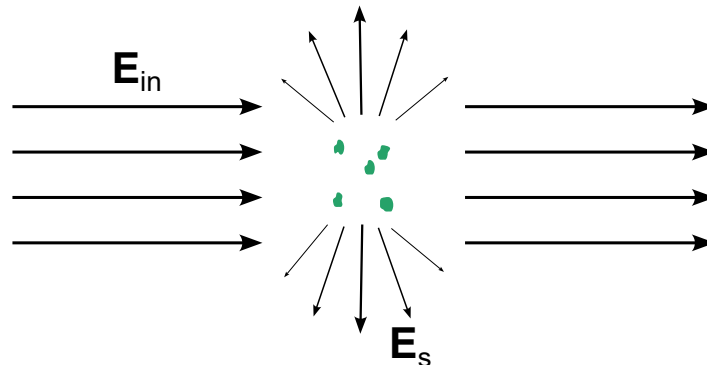


Abbildung 2.25: Schematische Darstellung zur Streuung von Licht an einem Ensemble von Partikeln.

Für die folgende Diskussion wollen wir von der in Abbildung schematisch dargestellten Situation ausgehen. Ein einfallende Welle \mathbf{E}_{in} trifft auf einen oder mehrere kleine Partikel und regt in diesen eine zeitlich veränderliche Variation der Ladungsträgerverteilung an. Diese wirkt als Quelle für eine elektromagnetische Welle \mathbf{E}_s . Das gesamte elektrische Feld ergibt sich damit aus der Überlagerung von \mathbf{E}_{in} und \mathbf{E}_s . Wir wollen davon ausgehen, dass die Frequenz der gestreuten Welle mit der der einfallenden Welle übereinstimmt (elastische Streuung). Weiterhin nehmen wir an, dass die Partikel klein im Vergleich zur Wellenlänge der einfallenden Welle sind. In diesem Fall wirken die Partikel als elektrische Dipole mit zeitlich veränderlichem Dipolmoment

$$\mathbf{p}(t) = \epsilon_0 \epsilon_m \alpha \mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t). \quad (2.6.1)$$

Hierbei ist α die Polarisierbarkeit des Partikels an der Position \mathbf{r}_0 und ϵ_m bezeichnet die dielektrische Funktion des Mediums, in das die Partikel eingebettet sind.

2.6.1 Elektrische Dipolstrahlung

Wir betrachten nun einen einzelnen elektrischen Dipol mit zeitabhängigem Dipolmoment

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 e^{-i\omega t}. \quad (2.6.2)$$

2 Die elektromagnetische Theorie des Lichts

Hierbei ist \mathbf{p}_0 ein konstanter Vektor, der die Richtung und die Amplitude des Dipolmoments angibt. Wir nehmen an, dass sich der Dipol bei $\mathbf{r} = 0$ im Vakuum befindet. Das zeitlich veränderliche Dipolmoment ist über die Kontinuitätsgleichung mit einer lokalen Stromdichte verknüpft:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \dot{\mathbf{p}}\delta(\mathbf{r}) = -i\omega\mathbf{p}_0e^{-i\omega t}\delta(\mathbf{r}). \quad (2.6.3)$$

Nach Gleichung (2.2.3) ist eine zeitlich veränderliche Stromdichte eine Quelle elektromagnetischer Strahlung. Für das abgestrahlte elektromagnetische Feld am Ort $\mathbf{r} = r\mathbf{n}$ findet man nach einer etwas längeren Rechnung⁷:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} = \frac{1}{c_0} \frac{e^{ikr}}{4\pi\epsilon_0 r} k^2 \left(1 - \frac{1}{ikr}\right) (\mathbf{n} \times \mathbf{p}_0) e^{-i\omega t}, \quad (2.6.4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \\ &= \frac{e^{ikr}}{4\pi\epsilon_0 r} \left\{ k^2 [(\mathbf{n} \times \mathbf{p}_0) \times \mathbf{n}] + \left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r}\right) [3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}_0) - \mathbf{p}_0] \right\} e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

Das elektrische Feld des Dipols weist mehrere Terme auf, die unterschiedlich schnell mit dem Abstand zum Ursprung abfallen. Für die weitere Behandlung ist insbesondere die Feldverteilung im Fernbereich ($kr \gg 1$) von Interesse. Hier dominiert der $1/r$ -Term über die Terme mit dem $1/r^2$ und $1/r^3$ Verhalten. Fernab vom Ursprung vereinfacht sich die Feldverteilung wie folgt:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \simeq \frac{1}{c_0} \frac{e^{ikr}}{4\pi\epsilon_0 r} k^2 (\mathbf{n} \times \mathbf{p}_0), \quad (2.6.6)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \simeq \frac{e^{ikr}}{4\pi\epsilon_0 r} k^2 [(\mathbf{n} \times \mathbf{p}_0) \times \mathbf{n}] = c_0 \mathbf{B}(\mathbf{r}) \times \mathbf{n}. \quad (2.6.7)$$

Wir können uns leicht davon überzeugen, dass im Fernbereich sowohl das elektrische Feld als auch das magnetische Feld transversalen Charakter haben, d.h., $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \perp \mathbf{n}$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \perp \mathbf{n}$. Weiterhin gilt $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \perp \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, so dass die drei Vektoren lokal ein orthogonales Dreibein bilden.

Als nächstes berechnen wir das zeitliche Mittel der Energiestromdichte des abgestrahlten elektromagnetischen Feldes:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle &= \frac{1}{2} \Re \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \frac{\mathbf{B}^*(\mathbf{r}, t)}{\mu_0} \right] = \frac{c_0}{2\mu_0} \Re [(\mathbf{B}(\mathbf{r}) \times \mathbf{n}) \times \mathbf{B}^*(\mathbf{r})] \\ &= \frac{c_0}{2\mu_0} |\mathbf{B}(\mathbf{r})|^2 \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (2.6.8)$$

⁷Elektrische Dipolstrahlung wird ausführlich in der Vorlesung Theoretische Physik II (Elektrodynamik) behandelt. Um unnötige Doppelungen zu vermeiden, verzichten wir an dieser Stelle auf die Herleitung der Formeln für das abgestrahlte elektromagnetische Feld eines Dipols.

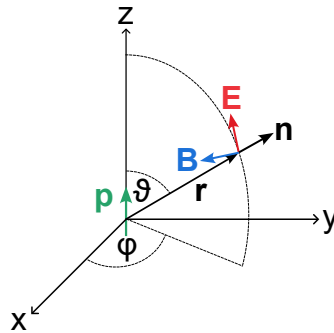


Abbildung 2.26: Im Fernfeld ist das abgestrahlte elektromagnetische Feld eines Dipols transversal.

Mit $|\mathbf{n} \times \mathbf{p}_0| = p_0 \sin(\theta)$ erhalten wir

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{c_0}{32\pi^2 \epsilon_0} \frac{k^4 |p_0|^2}{r^2} \sin^2(\theta) \mathbf{n}. \quad (2.6.9)$$

Der letzten Formel entnehmen wir, dass längs der Dipolachse ($\theta = 0$) keine Leistung abgestrahlt wird. Die maximale Abstrahlung erfolgt senkrecht ($\theta = 90^\circ$) zum Dipolmoment.

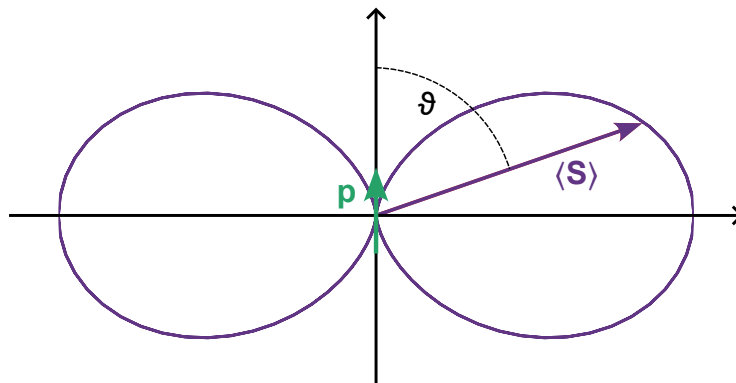


Abbildung 2.27: Winkelverteilung der Energiestromdichte der elektrischen Dipolstrahlung.

Um die gesamte abgestrahlte Leistung P zu berechnen, integrieren wir $|\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle|$ über eine Kugeloberfläche mit Radius r und dem Dipol im Zentrum. Mit $\iint d\Omega \sin^2(\theta) = \frac{8\pi}{3}$ folgt:

$$P = \frac{c_0}{12\pi \epsilon_0} k^4 p_0^2 = \frac{1}{12\pi \epsilon_0 c_0^3} \omega^4 |p_0|^2. \quad (2.6.10)$$

Die abgestrahlte Leistung eines elektrischen Dipols ist also proportional zur vierten Potenz der Frequenz. Wird der Dipol durch eine einlaufende Welle mit Intensität I getrieben, so können wir die gestreute Leistung schreiben als

$$P = \sigma_s(\omega) I, \quad (2.6.11)$$

mit dem Streuquerschnitt

$$\sigma_s(\omega) = \frac{|\alpha(\omega)|^2 \omega^4}{6\pi c^4}. \quad (2.6.12)$$

2.6.2 Kohärente Streuung

Wir wollen jetzt die Lichtausbreitung in einem homogenen Medium, z.B. einem Kristall, unter dem Gesichtspunkt der Lichtstreuung diskutieren. Nach dem Lorentz-Oszillator-Modell lenkt eine einfallende Welle die Elektronenhülle eines jeden Atoms relativ zum Atomkern aus und erzeugt damit ein zeitlich veränderliches Dipolmoment. Jedes Atom wirkt damit als ein elektrischer Dipol, der in verschiedene Richtungen abstrahlt (siehe Gleichung (2.6.9)). Man könnte also zunächst vermuten, dass die Lichtausbreitung in einem homogenen Medium aufgrund der gestreuten Wellen nicht geradlinig verläuft.

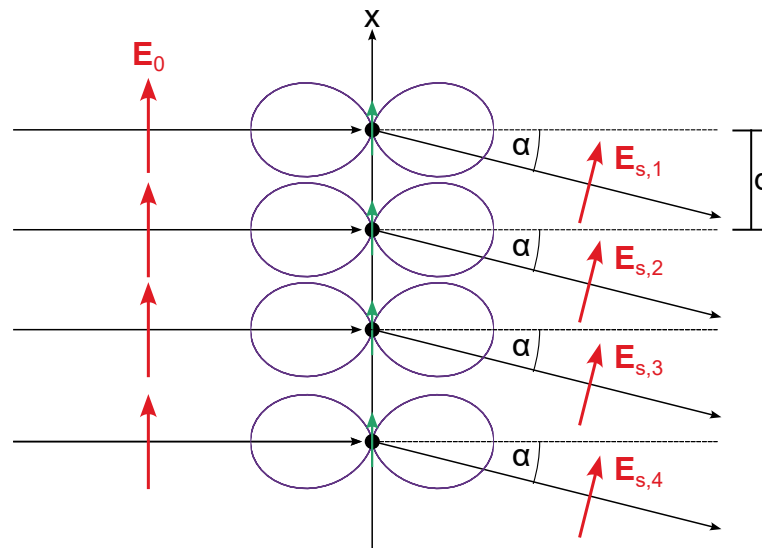


Abbildung 2.28: Ein Modellsystem für die kohärente Streuung.

Um zu zeigen, dass diese Vermutung nicht korrekt ist, betrachten wir das in Abbildung 2.28 dargestellte Modellsystem. Gegeben sei eine eindimensionale Kette von N Atomen, die entlang der x -Achse mit regelmäßigen Abstand d angeordnet sind. Wir wollen annehmen, dass sich diese Anordnung zeitlich nicht ändert. Eine in z -Richtung propagierende ebene Welle $\mathbf{E}(z, t) = E_0 \hat{\mathbf{e}}_x e^{i(kz - \omega t)}$ regt die Atome zu Schwingungen entlang der x -Richtung an. Hierbei sei die Wellenlänge λ groß gegen den Abstand d . Alle Atome werden phasengleich getrieben, so dass sich das resultierende Dipolmoment jeweils zu $\mathbf{p}(t) = \epsilon_0 \alpha E_0 \hat{\mathbf{e}}_x e^{-i\omega t}$ ergibt. Das gesamte gestreute Feld $\mathbf{E}_{s,\text{total}}(\mathbf{r}, t)$ ist gegeben durch die Überlagerung der einzelnen Dipolfelder $\mathbf{E}_{s,m}(\mathbf{r}, t)$:

$$\mathbf{E}_{s,\text{total}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{m=1}^N \mathbf{E}_{s,m}(\mathbf{r}, t). \quad (2.6.13)$$

2 Die elektromagnetische Theorie des Lichts

Da sich die Abstände zwischen den Atomen nicht ändern, sind die einzelnen Beiträge zum gestreuten Feld phasengekoppelt. Man spricht in diesem Fall von kohärenter Streuung. Aufgrund der festen Phasenbeziehung interferieren die in eine bestimmte Richtung abgestrahlten Teilwellen miteinander⁸. Trifft "Wellenberg auf Wellenberg", so überlagern sich die Teilwellen konstruktiv und die Wellen verstärken sich. Trifft dagegen "Wellenberg auf Wellental", so interferieren die Wellen destruktiv und löschen sich (teilweise) aus.

Die Gesamtintensität der gestreuten Welle ist proportional zum Betragsquadrat der Gesamtfeldstärke:

$$I_{s,\text{total}} \propto |\mathbf{E}_{s,\text{total}}|^2. \quad (2.6.14)$$

Für die in Richtung α abgestrahlte Intensität gilt (siehe Abschnitt 6.2.4):

$$I(\alpha) = I_0 \frac{\sin^2\left(N\pi\frac{d}{\lambda}\sin(\alpha)\right)}{\sin^2\left(\pi\frac{d}{\lambda}\sin(\alpha)\right)}. \quad (2.6.15)$$

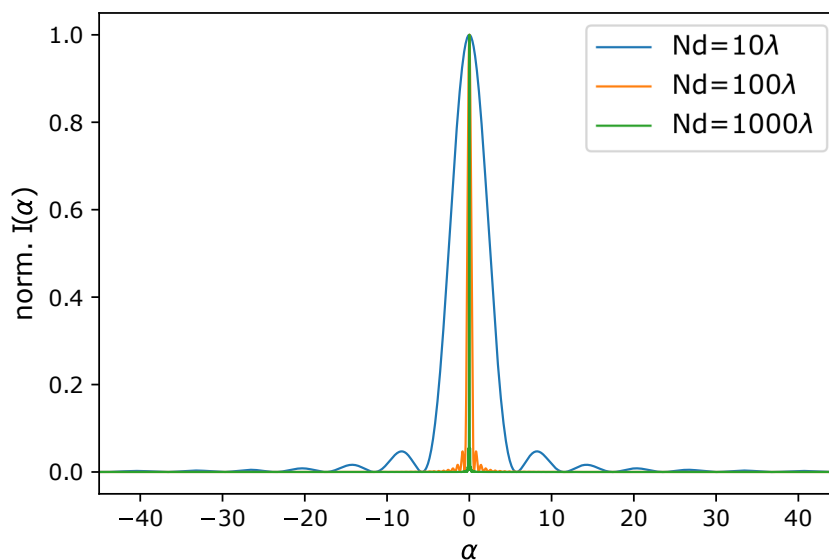


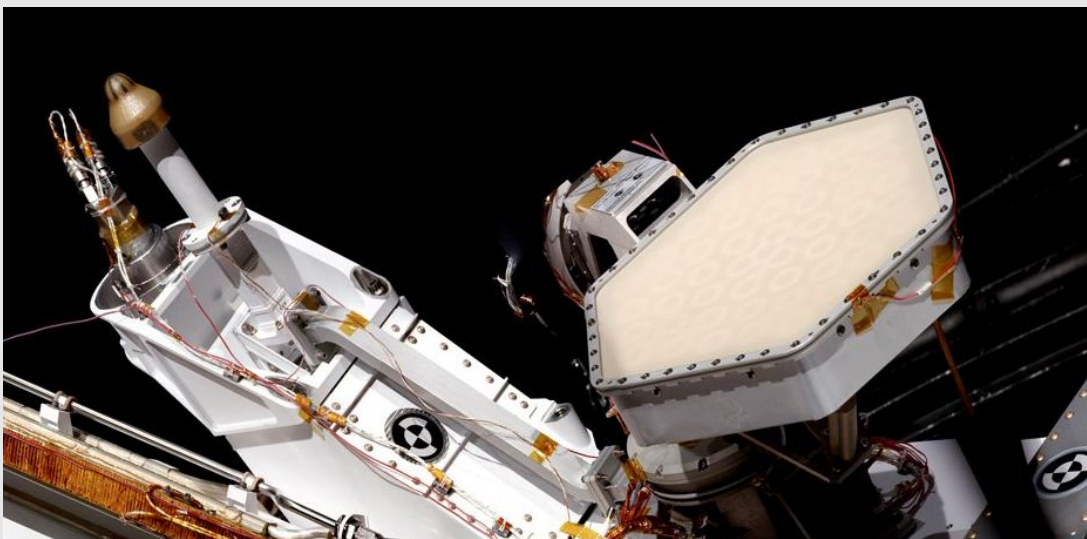
Abbildung 2.29: Winkelverteilung der Intensität bei einer eindimensionalen Kette von Dipolen.

Im Folgenden wollen wir die Winkelverteilung der Intensität $I(\alpha)$ diskutieren (siehe Abbildung 2.29). $I(\alpha)$ weist unabhängig von der Kettenlänge für $\alpha = 0^\circ$ ein Maximum auf, da sich die Beiträge aller Dipole in Vorwärtsrichtung konstruktiv überlagern. Ein Großteil der Intensität ist in einem zentralen Maximum konzentriert, dessen Winkelbreite rasch mit der Kettenlänge abnimmt. Dieses Verhalten kann leicht durch die destruktive Interferenz verschiedener Teilwellen erklärt werden. Im Grenzfall einer unendlich langen Kette, wird das Licht nur in Vorwärtsrichtung gestreut, d.h., wir haben eine Welle die sich geradlinig ausbreitet.

⁸Wir werden Wellenüberlagerung und Interferenz ausführlich in Kapitel 5 besprechen.

Gruppenantennen

In der RF-Technik werden Gruppenantennen (engl. phased array antenna) für verschiedene Anwendungen, z.B. Satellitenkommunikation, 5G Mobilfunk und Radar, genutzt. Wie der Name suggeriert bestehen Gruppenantennen aus mehreren Einzelstrahlern, die miteinander verschaltet sind. Die ausgestrahlte Welle entsteht wie im gerade besprochen Modellsystem durch die kohärente Überlagerung der Wellen der Einzelstrahler. Hierdurch kann eine starke Richtwirkung erzielt werden. Werden die Einzelstrahler mit zeitlich verzögerten Kopien des Signals getrieben, so kann die Gesamtemission der Gruppenantenne rein elektronisch geschwenkt werden. Die folgende Abbildung zeigt ein Foto der Phased-Array-Antenne des Mars-Rovers Curiosity (Quelle: Wikipedia).



2.6.3 Inkohärente Streuung

Experiment: Rayleigh-Streuung.

Während in einem Festkörper die Atome feste Positionen innehaben⁹, ändern sich diese in einem Gas ständig. Dies führt zu einem völlig anderen Streuverhalten. Wie zuvor betrachten wir die Bestandteile des Gases als Dipole, die durch eine einfallende Welle angeregt werden können. Da die Atome im Gas in ständiger Bewegung sind und es somit andauernd zu geringen Dichteschwankungen kommt, mitteln sich die relativen Phasendifferenzen zeitlichen heraus, d.h., wir beobachten keine konstruktive und destruktive Interferenz zwischen den einzelnen Teilwellen. Wir sprechen in diesem Fall von inkohärenter Streuung.

⁹Wir vernachlässigen hier die kleinen Schwingungen der Atome um ihre Gleichgewichtslage.

Die Gesamtintensität ergibt sich damit als die Summe der Einzelintensitäten:

$$I_{s,\text{total}} \propto \sum_{m=1}^N |\mathbf{E}_{s,m}|^2. \quad (2.6.16)$$

Wir wollen uns nun überlegen, wie wir die blaue Färbung des Himmels am Tag und die Rotfärbung der Sonne beim Auf- bzw. Untergang als Streuphänomene verstehen können. Das einfallende Sonnenlicht wechselwirkt mit den Molekülen der Atmosphäre. Betrachten wir diese im Rahmen des Lorentz-Oszillator-Modells, so gilt für deren Polarisierbarkeit:

$$\alpha(\omega) = \frac{q^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_e^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}. \quad (2.6.17)$$

Für Stickstoff und Sauerstoff liegt die jeweilige Resonanzfrequenz ω_e im ultravioletten Spektralbereich. Die Molekulare Polarisierbarkeit ist daher für sichtbares Licht ($\omega \ll \omega_e$) näherungsweise konstant:

$$\alpha \approx \frac{q^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_e^2}. \quad (2.6.18)$$

Nach Gleichung (2.6.12) erwarten wir in diesem Fall, dass der Streuquerschnitt $\sigma_s(\omega)$ mit der vierten Potenz der Frequenz ω wächst. Man spricht in diesem Fall von Rayleigh-Streuung. Der Streuquerschnitt für blaues Licht (420 nm Wellenlänge) ist ungefähr zehn mal größer als der von rotem Licht (750 nm Wellenlänge). Aus diesem Grund werden überwiegend die blauen Anteile des einfallenden weißen Sonnenlichts an der Atmosphäre gestreut und der Himmel erscheint tagsüber blau. In der Dämmerung muss das Sonnenlicht einen besonders langen Weg durch die Atmosphäre zurücklegen. Das blaue Licht wird daher größtenteils gestreut und den Beobachter erreichen nur noch die roten Spektralanteile, d.h die Sonne erscheint rot.

2.7 Optische Pinzetten

Experiment: Optische Pinzette.

Stark fokussierte Laserstrahlen können als optische Pinzetten zum Fangen und Manipulieren kleiner Objekte genutzt werden. Für seine bahnbrechenden Untersuchungen auf diesem Gebiet erhielt Arthur Ashkin im Jahr 2018 den Nobelpreis in Physik.

Im Folgenden betrachten wir eine kleine dielektrische Kugel mit Radius a und dielektrischer Funktion ϵ_s , die von einem fokussierten Laserstrahl mit Intensität $I(\mathbf{r})$ beleuchtet wird. Die dielektrische Funktion des umgebenden Mediums sei ϵ_m . Wir wollen annehmen, dass die Bedingung $a \ll \lambda$ im Medium erfüllt ist. Die zeitlich gemittelte optische Kraft $\langle \mathbf{F}_{\text{total}}(\mathbf{r}) \rangle$, die auf die Kugel wirkt, hat zwei Komponenten:

$$\langle \mathbf{F}_{\text{total}}(\mathbf{r}) \rangle = \langle \mathbf{F}_{\text{scat}}(\mathbf{r}) \rangle + \langle \mathbf{F}_{\text{grad}}(\mathbf{r}) \rangle. \quad (2.7.1)$$

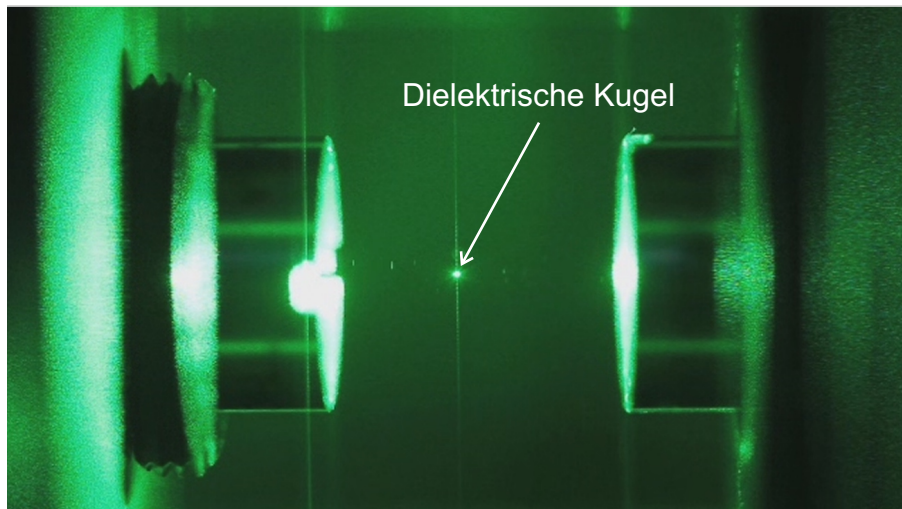


Abbildung 2.30: Glaskugel in einer optischen Falle. Quelle: Wikipedia.

Der erste Term steht für die sogenannte Spontankraft $\langle \mathbf{F}_{\text{scat}}(\mathbf{r}) \rangle$, die entlang der Strahlausbreitungsrichtung wirkt. Sie drückt die Kugel aus dem Fokus heraus. Der zweite Term, die sogenannte Gradientenkraft $\langle \mathbf{F}_{\text{grad}}(\mathbf{r}) \rangle$, beschreibt eine Kraft in Richtung des Gradienten der Intensität. Sie führt dazu, dass die Kugel in den Fokus hineingezogen wird.

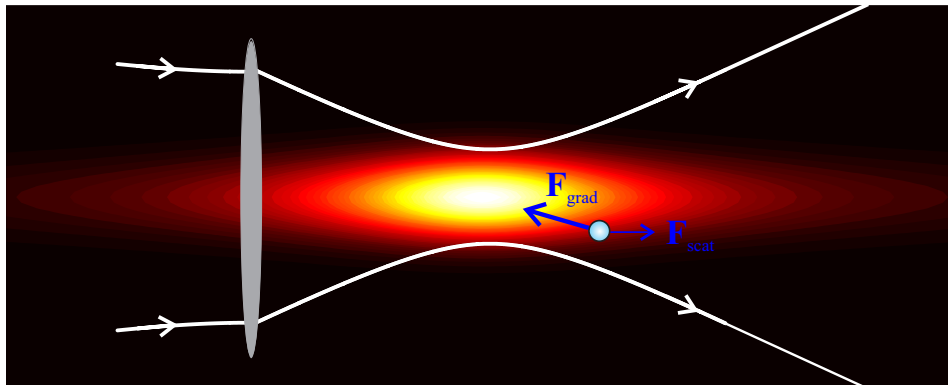


Abbildung 2.31: Illustration der optischen Kräfte die auf eine kleine dielektrische Kugel in einem fokussierten Laserstrahl wirken.

2.7.1 Spontankraft

Die Spontankraft ist eine Folge der Lichtstreuung durch die dielektrische Kugel. Für $a \ll \lambda$ weist die Kugel ein dipolartiges Streuverhalten auf und der totale Streuquerschnitt ist gegeben durch (siehe Abschnitt 2.6.1)

$$\sigma_{\text{scat}} = \frac{k^4}{6\pi} |\alpha|^2, \quad (2.7.2)$$

mit der Polarisierbarkeit (Beweis: Übung)

$$\alpha = 4\pi a^3 \frac{\epsilon_s - \epsilon_m}{\epsilon_s + 2\epsilon_m}. \quad (2.7.3)$$

Die gesamte gestreute Leistung wird beschrieben durch

$$P_{\text{scat}}(\mathbf{r}) = \sigma_{\text{scat}} I(\mathbf{r}). \quad (2.7.4)$$

Das Auftreten der Spontankraft kann intuitiv im Photonen-Bild (Kapitel 7) verstanden werden. Hierzu betrachten wir den Laserstrahl als Strom von Photonen. Jedes einzelne Photon besitzt die Energie $\hbar\omega$ und den Impuls $\hbar k \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}$. Einen einzelnen Streuprozess können wir uns vorstellen als die Absorption eines Photons aus dem einfallenden Laserstrahl gefolgt von der Reemission eines Photons mit der selben Frequenz. Die Absorption des Photons überträgt den Impuls $\hbar k \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}$ auf die Kugel. Bei der Reemission eines Photons in die Richtung $\hat{\mathbf{e}}'_{\mathbf{k}}$ wird dementsprechend ein Impuls $-\hbar k \hat{\mathbf{e}}'_{\mathbf{k}}$ auf die Kugel übertragen. Da jedoch bei der Dipolstreuung die Reemission mit gleicher Wahrscheinlichkeit in die Richtung $\hat{\mathbf{e}}'_{\mathbf{k}}$ und $-\hat{\mathbf{e}}'_{\mathbf{k}}$ erfolgt, verschwindet im zeitlichen Mittel der Impulsübertrag durch die Reemissionsprozesse. Somit können wir die zeitlich gemittelte Spontankraft schreiben als das Produkt der Anzahl der Streuprozesse pro Zeiteinheit und dem Impulsübertrag pro Absorptionsprozess:

$$\langle \mathbf{F}_{\text{scat}}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{n_m P_{\text{scat}}(\mathbf{r})}{c_0} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}} = \frac{128\pi^5 a^6 n_m}{3\lambda^4 c_0} \left(\frac{\epsilon_s - \epsilon_m}{\epsilon_s + 2\epsilon_m} \right)^2 I(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}. \quad (2.7.5)$$

2.7.2 Gradientenkraft

Der einfallende Laserstrahl polarisiert die Kugel und induziert das Dipolmoment

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \epsilon_m \alpha \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (2.7.6)$$

Die potentielle Energie der Kugel im Laserstrahl ist daher gegeben durch¹⁰

$$U(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{2} \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_m \alpha \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (2.7.7)$$

Der zeitliche Mittelwert der potentiellen Energie berechnet sich damit zu

$$\langle U(\mathbf{r}) \rangle = -\frac{1}{4} \epsilon_0 \epsilon_m \alpha |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2. \quad (2.7.8)$$

Somit folgt für den zeitlichen Mittelwert der Gradientenkraft:

$$\langle \mathbf{F}_{\text{grad}}(\mathbf{r}) \rangle = -\nabla \langle U(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{4} \epsilon_0 \epsilon_m \alpha \nabla |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 = \frac{2\pi a^3 n_m}{c_0} \frac{\epsilon_s - \epsilon_m}{\epsilon_s + 2\epsilon_m} \nabla I(r). \quad (2.7.9)$$

¹⁰Der Faktor 1/2 berücksichtigt, dass das Dipolmoment nicht permanent ist sondern durch den Strahl induziert wird.

2.7.3 Fallenbedingung

Wir wollen nun untersuchen, unter welchen Bedingungen die Kugel durch den Laserstrahl gefangen werden kann. Wir nehmen hierbei an, dass der Laserstrahl ein Gauß-Strahl ist, dessen Strahltaile bei $z = 0$ liegt. Die Kugel befinde sich auf der optischen Achse an der Position z . Die auf die Kugel wirkenden, zeitlich gemittelten Kräfte können wir schreiben als

$$\langle F_{\text{scat}}(z) \rangle = \frac{128\pi^5 a^6 n_m}{3\lambda^4 c_0} \left(\frac{\epsilon_s - \epsilon_m}{\epsilon_s + 2\epsilon_m} \right)^2 \frac{1}{[1 + (z/z_0)^2]} I_0, \quad (2.7.10)$$

$$\langle F_{\text{grad}}(z) \rangle = -\frac{2\pi a^3 n_m}{c_0} \left(\frac{\epsilon_s - \epsilon_m}{\epsilon_s + 2\epsilon_m} \right) \frac{2z/z_0^2}{[1 + (z/z_0)^2]^2} I_0. \quad (2.7.11)$$

Das Verhältnis der beiden Kräfte ist

$$\frac{|\langle F_{\text{grad}}(z) \rangle|}{|\langle F_{\text{scat}}(z) \rangle|} = \frac{3\lambda^4}{64\pi^4 a^3} \frac{\epsilon_s + 2\epsilon_m}{\epsilon_s - \epsilon_m} \frac{2z/z_0^2}{1 + (z/z_0)^2}. \quad (2.7.12)$$

Bei $z = z_0$ erreicht dieses seinen Maximalwert

$$\frac{|\langle F_{\text{grad}}(z_0) \rangle|}{|\langle F_{\text{scat}}(z_0) \rangle|} = \frac{3\lambda^4}{64\pi^4 a^3} \frac{\epsilon_s + 2\epsilon_m}{\epsilon_s - \epsilon_m} \frac{1}{z_0}. \quad (2.7.13)$$

Die dielektrische Kugel kann durch den Gauß-Strahl gefangen werden, falls an einem Ort die Gradientenkraft größer als die Spontankraft ist. Dies erfordert typischerweise stark fokussierte Strahlen (siehe Abbildung 2.32).

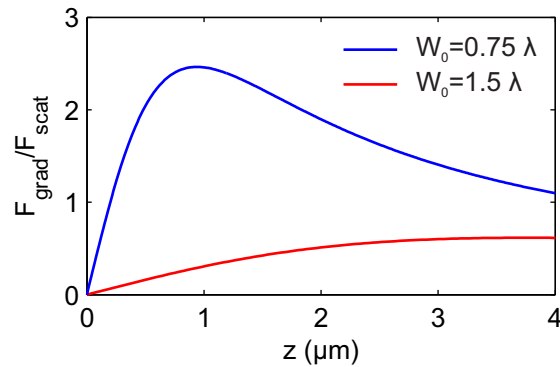


Abbildung 2.32: Verhältnis von Gradientenkraft und Spontankraft auf den optischen Achsen zweier Gauß-Strahlen. Parameter: $\lambda_0 = 532 \text{ nm}$, $\epsilon_s = 2.25$ (glass), $\epsilon_m = 1.769$ (water), $a = 40 \text{ nm}$.

3 Elektromagnetische Felder an Grenzflächen

Wir wenden uns nun dem Verhalten von elektromagnetische Wellen an einer Grenzfläche zwischen zwei unterschiedlichen Medien zu. Hierzu betrachten wir zunächst die Stetigkeitsbedingungen der einzelnen Feldkomponenten an einer Grenzfläche. Im Anschluss daran untersuchen wir das Reflexions- und Transmissionsverhalten von ebenen Wellen an einer Grenzfläche und diskutieren optische Wellenleitung.

3.1 Stetigkeitsbedingungen

Mit Hilfe der Maxwellgleichungen können wir das Verhalten von elektromagnetischen Feldern an Grenzflächen analysieren. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass die Grenzfläche ungeladen ist ($\rho = 0$) und die Flächenstromdichte verschwindet ($\mathbf{j} = 0$).

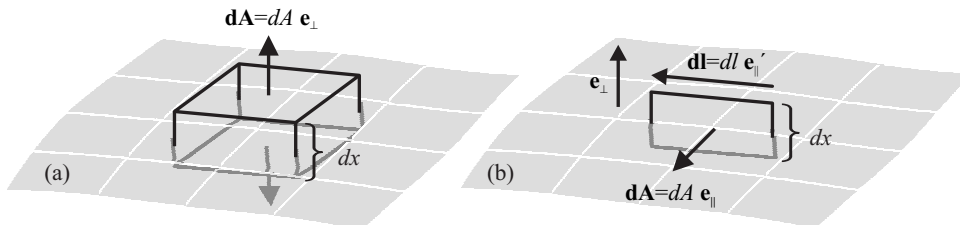


Abbildung 3.1: (a) Gaußsches Kästchen und (b) Stokessche Fläche.

Im Folgenden denken wir uns ein kleines Gaußsches Kästchen, das die Grenzfläche schneidet (siehe Abbildung 3.1 (a)). Aus $\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 0$ folgt mit dem Gaußschen Satz für das Gaußsche Kästchen:

$$\int_{dV} \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) d^3r = \int_{\partial(dV)} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{A} \stackrel{!}{=} 0. \quad (3.1.1)$$

Im Limes $dx \rightarrow 0$ gilt:

$$\int_{\partial(dV)} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{A} \xrightarrow{dx \rightarrow 0} dA \hat{\mathbf{e}}_{\perp} \cdot (\mathbf{D}_1(\mathbf{r}_0, t) - \mathbf{D}_2(\mathbf{r}_0, t)) \stackrel{!}{=} 0. \quad (3.1.2)$$

Hierbei sind $\mathbf{D}_1(\mathbf{r}_0, t)$ und $\mathbf{D}_2(\mathbf{r}_0, t)$ die elektrischen Flussdichten in den beiden Medien direkt an der Grenzfläche. Wir sehen also, dass die Normalkomponente $\mathbf{D}_{\perp}(\mathbf{r}_0, t)$ stetig ist. Entsprechend folgt aus $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$, die Stetigkeit der Normalkomponente $\mathbf{B}_{\perp}(\mathbf{r}_0, t)$.

3 Elektromagnetische Felder an Grenzflächen

Als nächstes untersuchen wir eine Stokessche Fläche (siehe Abbildung 3.1 (b)), die die Grenzfläche schneidet. Der Stokessche Satz liefert mit $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t)$:

$$\int_{dA} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} dA = \int_{\partial dA} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} = - \int_{dA} \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} dA. \quad (3.1.3)$$

Für $dx \rightarrow 0$ gilt:

$$\int_{\partial dA} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} \xrightarrow{dx \rightarrow 0} dl \underbrace{(\hat{\mathbf{e}}_{\parallel} \times \hat{\mathbf{e}}_{\perp})}_{\mathbf{e}_{\parallel'}} \cdot (\mathbf{E}_1(\mathbf{r}_0, t) - \mathbf{E}_2(\mathbf{r}_0, t)) \stackrel{!}{=} 0. \quad (3.1.4)$$

Hierbei haben wir im letzten Schritt ausgenutzt, dass die Fläche dA des Rechtecks für $dx \rightarrow 0$ verschwindet und daher $-\int_{dA} \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{e}_{\parallel} dA \xrightarrow{dx \rightarrow 0} 0$ gilt. Wir sehen somit, dass die Tangentialkomponente $\mathbf{E}_{\parallel}(\mathbf{r}_0, t)$ stetig ist. Ganz analog kann gezeigt werden, dass die Tangentialkomponente $\mathbf{H}_{\parallel}(\mathbf{r}_0, t)$ ebenfalls stetig ist.

Die folgende Tabelle fasst die Stetigkeitsbedingungen der verschiedenen Feldkomponenten an einer Grenzfläche zusammen:

Tangentialkomponente	Normalkomponente
$\mathbf{E}_{1,\parallel}(\mathbf{r}_0, t) = \mathbf{E}_{2,\parallel}(\mathbf{r}_0, t)$	$\mathbf{E}_{1,\perp}(\mathbf{r}_0, t) = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \mathbf{E}_{2,\perp}(\mathbf{r}_0, t)$
$\mathbf{D}_{1,\parallel}(\mathbf{r}_0, t) = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \mathbf{D}_{2,\parallel}(\mathbf{r}_0, t)$	$\mathbf{D}_{1,\perp}(\mathbf{r}_0, t) = \mathbf{D}_{2,\perp}(\mathbf{r}_0, t)$
$\mathbf{H}_{1,\parallel}(\mathbf{r}_0, t) = \mathbf{H}_{2,\parallel}(\mathbf{r}_0, t)$	$\mathbf{H}_{1,\perp}(\mathbf{r}_0, t) = \frac{\mu_2}{\mu_1} \mathbf{H}_{2,\perp}(\mathbf{r}_0, t)$
$\mathbf{B}_{1,\parallel}(\mathbf{r}_0, t) = \frac{\mu_1}{\mu_2} \mathbf{B}_{2,\parallel}(\mathbf{r}_0, t)$	$\mathbf{B}_{1,\perp}(\mathbf{r}_0, t) = \mathbf{B}_{2,\perp}(\mathbf{r}_0, t)$

3.2 Die Reflexion von Licht für senkrechten Einfall

Wir wollen nun die Stetigkeitsbedingungen verwenden, um den Amplitudenreflexionskoeffizienten einer ebenen Welle an der Grenzfläche zwischen zwei Medien mit Materialparametern ϵ_1, μ_1 bzw. ϵ_2, μ_2 zu bestimmen. Hierzu betrachten wir zunächst den Fall, dass die einfallende Welle senkrecht auf die Grenzfläche trifft:

$$E_i(z, t) = E_{0i} e^{i(k_1 z - \omega t)}, \quad (3.2.1)$$

$$H_i(z, t) = H_{0i} e^{i(k_1 z - \omega t)} = \frac{1}{Z_1} E_{0i} e^{i(k_1 z - \omega t)}. \quad (3.2.2)$$

Aufgrund der Stetigkeitsbedingungen gilt:

$$\frac{E_{1,\parallel}(z=0, t)}{H_{1,\parallel}(z=0, t)} = \frac{E_{2,\parallel}(z=0, t)}{H_{2,\parallel}(z=0, t)}. \quad (3.2.3)$$

3 Elektromagnetische Felder an Grenzflächen

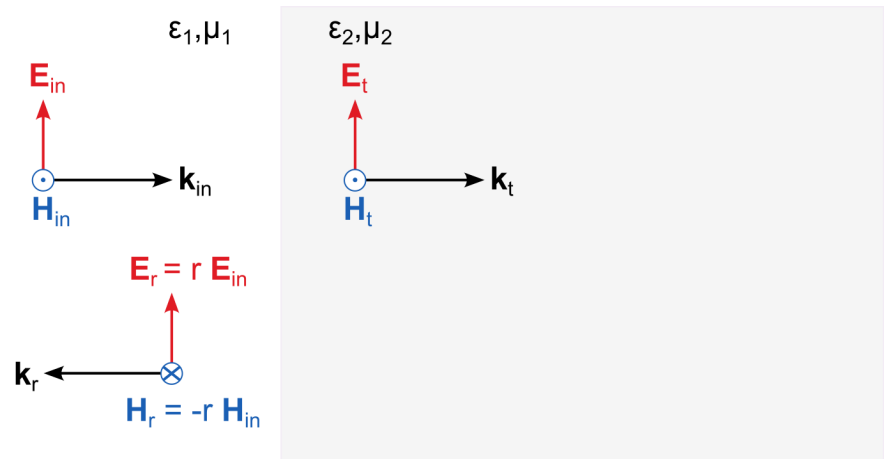


Abbildung 3.2: Reflexion einer ebenen Welle an einer Grenzfläche für senkrechten Lichteinfall.

Hierbei sind $E_{1,\parallel}(z=0, t)$ und $H_{1,\parallel}(z=0, t)$ beziehungsweise $E_{2,\parallel}(z=0, t)$ und $H_{2,\parallel}(z=0, t)$ bei senkrechtem Einfall die Gesamtfeldstärken in den jeweiligen Medien. Ausgehend von experimentellen Beobachtungen schreiben wir die Felder in Medium 1 als Überlagerung der einlaufenden Welle und einer reflektierten Welle:

$$E_1(z, t) = E_{0i}e^{i(k_1z - \omega t)} + r E_{0i}e^{i(-k_1z - \omega t)}, \quad (3.2.4)$$

$$H_1(z, t) = H_{0i}e^{i(k_1z - \omega t)} - r H_{0i}e^{i(-k_1z - \omega t)}. \quad (3.2.5)$$

Hierbei ist r der sogenannte Amplitudenreflexionskoeffizient. In Medium 2 erwarten wir nur eine ebene Welle, die sich von der Grenzfläche weg bewegt:

$$E_2(z, t) = E_{0t}e^{i(k_2z - \omega t)}, \quad (3.2.6)$$

$$H_2(z, t) = H_{0t}e^{i(k_2z - \omega t)} = \frac{1}{Z_2} E_{0t}e^{i(k_2z - \omega t)}. \quad (3.2.7)$$

Einsetzen in Gleichung (3.2.3) liefert:

$$\frac{E_{0i}(1+r)}{H_{0i}(1-r)} = \frac{E_{0t}}{H_{0t}} \Rightarrow Z_1 \frac{(1+r)}{(1-r)} = Z_2. \quad (3.2.8)$$

Die letzte Gleichung kann nach r aufgelöst werden und wir finden:

$$r = \frac{(Z_2 - Z_1)}{(Z_2 + Z_1)}. \quad (3.2.9)$$

Wir sehen also, dass die einlaufende Welle teilweise reflektiert wird, wenn die beiden Medien unterschiedliche Impedanzen aufweisen.

3.3 Fresnel-Gleichungen

Experiment: Reflexion und Brechung am Glassegment.

In diesem Abschnitt wollen wir die Reflexion und Transmission einer ebenen, elektromagnetischen Welle an einer ebenen Grenzfläche bei $z = 0$ für beliebige Einfallswinkel θ_i betrachten. Die beiden Medien seien durch die Materialparameter ϵ_1, μ_1 bzw. ϵ_2, μ_2 charakterisiert. Der Normalenvektor der Grenzfläche $\hat{\mathbf{e}}_\perp$ und der Wellenvektor der einfallenden Welle \mathbf{k}_i spannen die sogenannte Einfallsebene auf.

Trifft eine ebene Welle aus Medium 1 kommend auf die Grenzfläche, so wird die Welle teilweise reflektiert und teilweise in das Medium 2 transmittiert. Die drei Wellen wollen wir wie folgt schreiben:

- Einfallende Welle (Medium 1):

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{0i} e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)}, \quad \mathbf{B}_i(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_{0i} e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)}. \quad (3.3.1)$$

- Reflektierte Welle (Medium 1):

$$\mathbf{E}_r(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{0r} e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega_r t)}, \quad \mathbf{B}_r(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_{0r} e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega_r t)}. \quad (3.3.2)$$

- Transmittierte Welle (Medium 2):

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{0t} e^{i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega_t t)}, \quad \mathbf{B}_t(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_{0t} e^{i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega_t t)}. \quad (3.3.3)$$

Aufgrund der Stetigkeit der Tangentialkomponente des elektrischen Feldes an der Grenzfläche gilt:

$$\hat{\mathbf{e}}_\perp \times \left(\mathbf{E}_{0i} e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)} + \mathbf{E}_{0r} e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega_r t)} \right) = \hat{\mathbf{e}}_\perp \times \mathbf{E}_{0t} e^{i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega_t t)}. \quad (3.3.4)$$

Diese Gleichung muss für $\mathbf{r} = 0$ zu allen Zeiten erfüllt sein. Hieraus folgt:

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t. \quad (3.3.5)$$

Ferner muss für jeden beliebigen Vektor \mathbf{r}_\parallel , der in der Grenzfläche liegt, die folgenden Bedingungen gelten:

$$\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}_\parallel = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}_\parallel = \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}_\parallel. \quad (3.3.6)$$

Wir zerlegen nun die Wellenvektoren in eine Normalkomponente parallel zu $\hat{\mathbf{e}}_\perp$ und in eine Tangentialkomponente, die parallel zur Grenzfläche orientiert ist:

$$\mathbf{k}_j = k_{j,\perp} \hat{\mathbf{e}}_\perp + k_{j,\parallel} \hat{\mathbf{e}}_{j,\parallel} \quad \text{mit } j = i, r, t. \quad (3.3.7)$$

Einsetzen in Gleichung (3.3.6) zeigt:

$$k_{i,\parallel} \hat{\mathbf{e}}_{i,\parallel} = k_{r,\parallel} \hat{\mathbf{e}}_{r,\parallel} = k_{t,\parallel} \hat{\mathbf{e}}_{t,\parallel}. \quad (3.3.8)$$

3 Elektromagnetische Felder an Grenzflächen

Somit sind die Tangentialkomponenten der drei Wellenvektoren gleich und die Wellenvektoren liegen alle in der Einfallsebene.

Die einfallende und die reflektierte Welle befinden sich beide in Medium 1, so dass die zugehörigen Wellenvektoren den selben Betrag $k_i = k_r = k_0 n_1$ aufweisen. Zusammen mit $k_{i,\parallel} = k_i \sin(\theta_i)$ und $k_{r,\parallel} = k_r \sin(\theta_r)$ ergibt sich damit das Reflexionsgesetz:

$$\boxed{\theta_i = \theta_r}. \quad (3.3.9)$$

Für die einfallende und die transmittierte Welle gilt:

$$k_i \sin(\theta_i) = k_t \sin(\theta_t). \quad (3.3.10)$$

Mit $k_i = k_0 n_1$ und $k_t = k_0 n_2$ folgt sofort das Brechungsgesetz:

$$\boxed{n_1 \sin(\theta_i) = n_2 \sin(\theta_t)}. \quad (3.3.11)$$

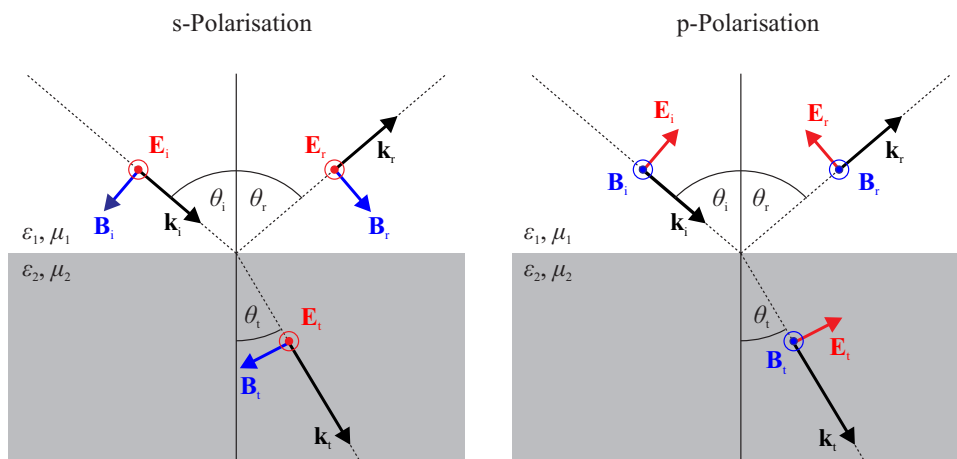


Abbildung 3.3: Reflexion und Brechung einer ebenen Welle an einer Grenzfläche für s-Polarisation und p-Polarisation.

Wir wollen nun die Amplituden und Phasen der reflektierten und transmittierten Wellen berechnen. Hierbei ist es ausreichend zwei Fälle zu betrachten, die in der Literatur mit s-Polarisation und p-Polarisation bezeichnet werden¹. Alle anderen Fälle können dann als Überlagerung entsprechend polarisierter Wellen behandelt werden.

¹Merkregel: „s wie senkrecht“ und „p wie parallel“ (zur Einfallsebene).

3.3.1 S-Polarisation

Wir betrachten zunächst Reflexion und Transmission für s-Polarisation, d.h., wir nehmen an, dass das elektrische Feld senkrecht auf der Einfallsebene steht. Aus der Stetigkeitsbedingung für \mathbf{E}_{\parallel} folgt:

$$E_{0i} + E_{0r} = E_{0t}. \quad (3.3.12)$$

Zusätzlich ist $H_{\parallel} = B_{\parallel}/(\mu_0\mu)$ stetig an der Grenzfläche²:

$$-\frac{B_{0i}}{\mu_1\mu_0} \cos(\theta_i) + \frac{B_{0r}}{\mu_1\mu_0} \cos(\theta_r) = -\frac{B_{0t}}{\mu_2\mu_0} \cos(\theta_t). \quad (3.3.13)$$

Mit $\theta_i = \theta_r$ und $B_0 = \frac{n}{c_0}E_0$ finden wir:

$$\frac{n_1}{\mu_0\mu_1c_0} (E_{0i} - E_{0r}) \cos(\theta_i) = \frac{n_2}{\mu_0\mu_2c_0} E_{0t} \cos(\theta_t). \quad (3.3.14)$$

Einsetzen von Gleichung (3.3.12) liefert zusammen mit $1/Z = n/(\mu_0\mu c_0)$ die Fresnel-Gleichungen für s-Polarisation:

$$r_s \equiv \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_s = \frac{\frac{1}{Z_1} \cos(\theta_i) - \frac{1}{Z_2} \cos(\theta_t)}{\frac{1}{Z_1} \cos(\theta_i) + \frac{1}{Z_2} \cos(\theta_t)}, \quad (3.3.15)$$

$$t_s \equiv \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_s = \frac{\frac{2}{Z_1} \cos(\theta_i)}{\frac{1}{Z_1} \cos(\theta_i) + \frac{1}{Z_2} \cos(\theta_t)}. \quad (3.3.16)$$

In der Optik gilt (meistens) $\mu = 1$, so dass $1/Z = \frac{n}{Z_0}$. Die Fresnel-Gleichungen können dann in der folgenden Form angegeben werden:

$$r_s \equiv \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_s = \frac{n_1 \cos(\theta_i) - n_2 \cos(\theta_t)}{n_1 \cos(\theta_i) + n_2 \cos(\theta_t)}, \quad (3.3.17)$$

$$t_s \equiv \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_s = \frac{2n_1 \cos(\theta_i)}{n_1 \cos(\theta_i) + n_2 \cos(\theta_t)}, \quad (3.3.18)$$

3.3.2 P-Polarisation

Jetzt untersuchen wir das Reflexions- und Transmissionsverhalten einer Grenzfläche für p-Polarisation, bei der die magnetische Flußdichte senkrecht auf der Einfallsebene steht. Die Stetigkeitsbedingung für H_{\parallel} ergibt unter Benutzung von Gleichung (2.2.35):

$$\frac{1}{Z_1} E_{0i} + \frac{1}{Z_1} E_{0r} = \frac{1}{Z_2} E_{0t}. \quad (3.3.19)$$

²Die Vorzeichenwahl bezieht sich im Folgenden auf Abbildung 3.3.

3 Elektromagnetische Felder an Grenzflächen

Aus der Stetigkeit von E_{\parallel} an der Grenzfläche folgt:

$$E_{0i} \cos(\theta_i) - E_{0r} \cos(\theta_r) = E_{0t} \cos(\theta_t). \quad (3.3.20)$$

Unter Berücksichtigung des Reflexionsgesetzes erhalten wir nach kurzer Rechnung die Fresnel-Formeln für p-Polarisation:

$$r_p \equiv \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_p = \frac{\frac{1}{Z_2} \cos(\theta_i) - \frac{1}{Z_1} \cos(\theta_t)}{\frac{1}{Z_1} \cos(\theta_t) + \frac{1}{Z_2} \cos(\theta_i)}, \quad (3.3.21)$$

$$t_p \equiv \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_p = \frac{\frac{2}{Z_1} \cos(\theta_i)}{\frac{1}{Z_1} \cos(\theta_t) + \frac{1}{Z_2} \cos(\theta_i)}. \quad (3.3.22)$$

Für $\mu = 1$, lassen sich die Fresnel-Gleichungen wie folgt schreiben:

$$r_p \equiv \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_p = \frac{n_2 \cos(\theta_i) - n_1 \cos(\theta_t)}{n_1 \cos(\theta_t) + n_2 \cos(\theta_i)}, \quad (3.3.23)$$

$$t_p \equiv \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_p = \frac{2n_1 \cos(\theta_i)}{n_1 \cos(\theta_t) + n_2 \cos(\theta_i)}. \quad (3.3.24)$$

3.4 Reflexion und Transmission an der Grenzfläche zweier Dielektrika

Wir wollen nun die Fresnel-Formeln für zwei dielektrische Medien auswerten. Als Beispiel betrachten wir hierbei eine Grenzfläche zwischen Glas (Brechungsindex $n = 1.5$) und Luft (Brechungsindex $n = 1$)

3.4.1 Äußere Reflexion

Wir betrachten zunächst den Fall der äußeren Reflexion ($n_1 < n_2$), d.h. die einfallende Welle trifft aus dem optisch dünneren Medium kommend auf die Grenzfläche.

Bei senkrechtem Einfall gilt $|r_s| = |r_p|$ und $t_s = t_p$. Aufgrund der von uns verwendeten Vorzeichenkonvention weisen r_s und r_p unterschiedliche Vorzeichen auf. Für s-Polarisation ist das elektrische Feld der reflektierten Welle gegenüber der einfallenden Welle für alle Einfallswinkel um 180° phasenverschoben („Reflexion am festen Ende“). Beim Brewster-Winkel $\theta_i = \theta_B$ tritt für p-Polarisation keine reflektierte Welle auf ($r_p = 0$). Eine kurze Rechnung (Beweis: Übung) zeigt:

$$\tan(\theta_B) = \frac{n_2}{n_1}. \quad (3.4.1)$$

3 Elektromagnetische Felder an Grenzflächen

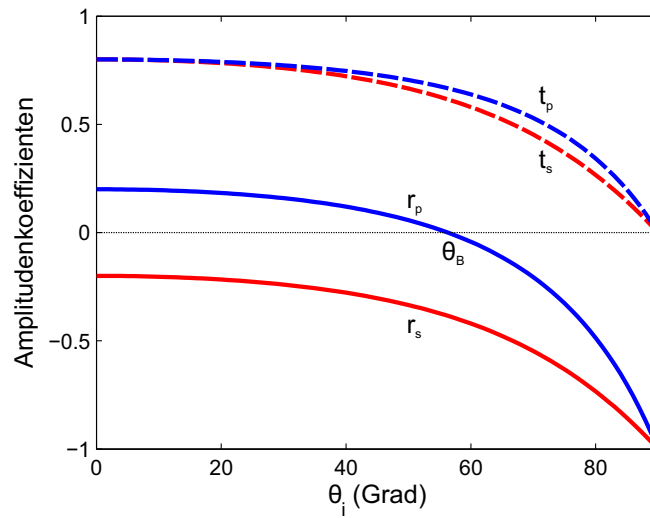


Abbildung 3.4: Amplitudenkoeffizienten als Funktion des Einfallswinkel bei äußerer Reflexion an der Luft/Glas Grenzfläche.

und

$$\theta_B + \theta_t = 90^\circ. \quad (3.4.2)$$

Für die Luft/Glas-Grenzfläche erhalten wir $\theta_B = 56.3^\circ$. Anschaulich kann die verschwindende Reflexion beim Brewsterwinkel wie folgt erklärt werden: Nahe der Grenzfläche werden im hochbrechenden Medium Dipole durch das elektrische Feld zu Schwingungen angeregt. Da die Dipole nicht in Richtung der Dipolachse abstrahlen, tritt keine reflektierte Welle auf. Für streifenden Einfall ($\theta_i \rightarrow 90^\circ$) wirkt die Glasscheibe wie ein Spiegel mit $r_{s,p} \rightarrow -1$ und $t_{s,p} \rightarrow 0$.

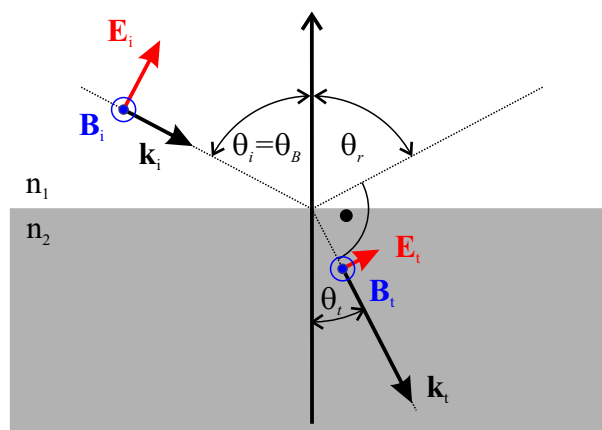


Abbildung 3.5: Brewster-Winkel.

3.4.2 Innere Reflexion

Als nächstes diskutieren wir nun den Fall der inneren Reflexion ($n_1 > n_2$), bei der das Licht aus dem optisch dichteren Medium auf die Grenzfläche fällt. Wir beschränken uns hierbei zunächst auf $\theta_i < \alpha_g$ mit $\sin(\alpha_g) = \frac{n_2}{n_1}$. Den Fall $\theta_i > \alpha_g$ werden wir im nächsten Abschnitt getrennt behandeln.

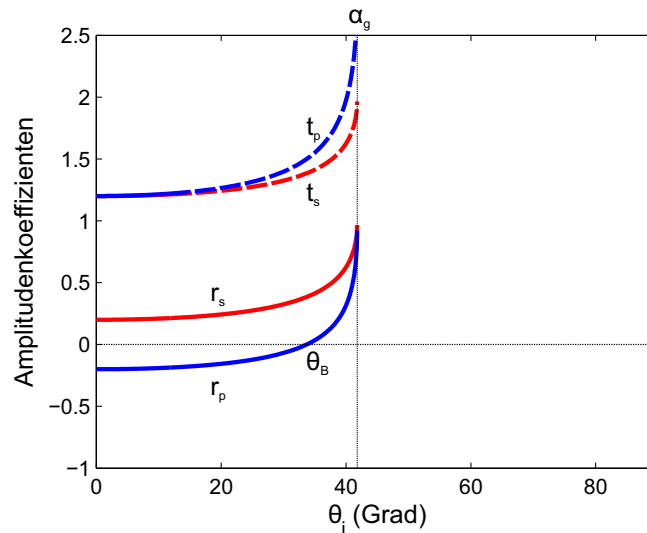


Abbildung 3.6: Amplitudenkoeffizienten als Funktion des Einfallswinkel bei innerer Reflexion an der Glas/Luft Grenzfläche.

Für senkrechten Einfall gilt wieder $|r_s| = |r_p|$ und $t_s = t_p$. Wie zuvor können wir die unterschiedlichen Vorzeichen von r_s und r_p auf unsere Vorzeichenkonvention zurückführen. Für s-Polarisation schwingt das elektrische Feld der reflektierten Welle für alle Einfallswinkel mit der einfallenden Welle in Phase („Reflexion am losen Ende“). Auch bei innerer Reflexion tritt beim Brewster-Winkel $\theta_i = \theta_B$ für p-Polarisation keine reflektierte Welle auf ($r_p = 0$). Wieder gilt:

$$\tan(\theta_B) = \frac{n_2}{n_1}. \quad (3.4.3)$$

und

$$\theta_B + \theta_t = 90^\circ. \quad (3.4.4)$$

Für die Luft/Glas-Grenzfläche gilt bei bei interner Reflexion $\theta_B = 33.7^\circ$. Nähert sich der Einfallswinkel dem Grenzwinkel der Totalreflexion ($\theta_i \rightarrow \alpha_g$) so streben die Amplitudenreflexionskoeffizienten gegen Eins ($r_{s,p} \rightarrow 1$). Interessanterweise gilt für die Amplitudentransmissionskoeffizienten $t_{s,p} \not\rightarrow 0$ (Widerspruch?).

3.5 Transmissions- und Reflexionsgrad

Bisher haben wir uns für die Amplituden der Felder an der Grenzfläche interessiert. Im Folgenden wollen wir die Energiestromdichten untersuchen, die mit der einlaufenden, der reflektierten und der transmittierten Welle verknüpft sind.

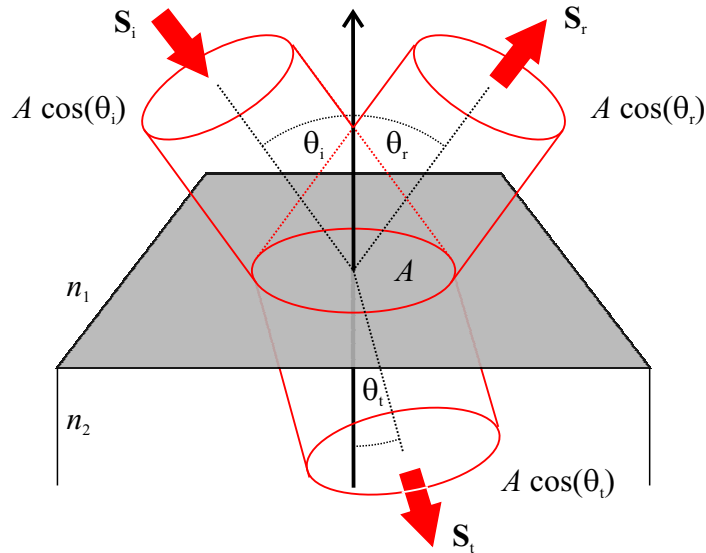


Abbildung 3.7: Reflexion und Transmission eines Strahlenbündels.

Nach Gleichung (2.2.73) gilt für den zeitlichen Mittelwert des Poyntingvektors:

- Einlaufende Welle:

$$\langle \mathbf{S}_i \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{Z_1} |\mathbf{E}_0|^2 \frac{\mathbf{k}_i}{|\mathbf{k}_i|}. \quad (3.5.1)$$

- Reflektierte Welle:

$$\langle \mathbf{S}_r \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{Z_1} |r \mathbf{E}_0|^2 \frac{\mathbf{k}_r}{|\mathbf{k}_r|}. \quad (3.5.2)$$

- Transmittierte Welle (äußere Reflexion und innere Reflexion für $\theta_i < \alpha_g$):

$$\langle \mathbf{S}_t \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{Z_2} |t \mathbf{E}_0|^2 \frac{\mathbf{k}_t}{|\mathbf{k}_t|}. \quad (3.5.3)$$

- Transmittierte Welle (innere Reflexion für $\theta_i \geq \alpha_g$):

$$\langle \mathbf{S}_t \rangle \cdot \mathbf{e}_\perp = 0 \quad (\text{siehe vorheriger Abschnitt}). \quad (3.5.4)$$

3 Elektromagnetische Felder an Grenzflächen

Der Reflexionsgrad R ist definiert als der Bruchteil der eingestrahnten Leistung, der an der Grenzfläche reflektiert wird:

$$R = \frac{|\langle \mathbf{S}_r \rangle \cdot \mathbf{e}_\perp|}{|\langle \mathbf{S}_i \rangle \cdot \mathbf{e}_\perp|} = |r|^2. \quad (3.5.5)$$

Der Transmissionsgrad T ist der Bruchteil der eingestrahnten Leistung, der durch die Grenzfläche transmittiert wird. In diesem Fall haben wir zu berücksichtigen, dass ein Flächenelement A von der einlaufenden Welle und der transmittierten Welle aufgrund der Brechung unter verschiedenen Winkeln „gesehen“ wird.

$$T = \frac{|\langle \mathbf{S}_t \rangle \cdot \mathbf{e}_\perp|}{|\langle \mathbf{S}_i \rangle \cdot \mathbf{e}_\perp|} = \frac{Z_1 \cos(\theta_t)}{Z_2 \cos(\theta_i)} |t|^2. \quad (3.5.6)$$

Aus Gründen der Energieerhaltung gilt für verlustfreie Medien (reelle Impedanzen):

$$R + T = 1. \quad (3.5.7)$$

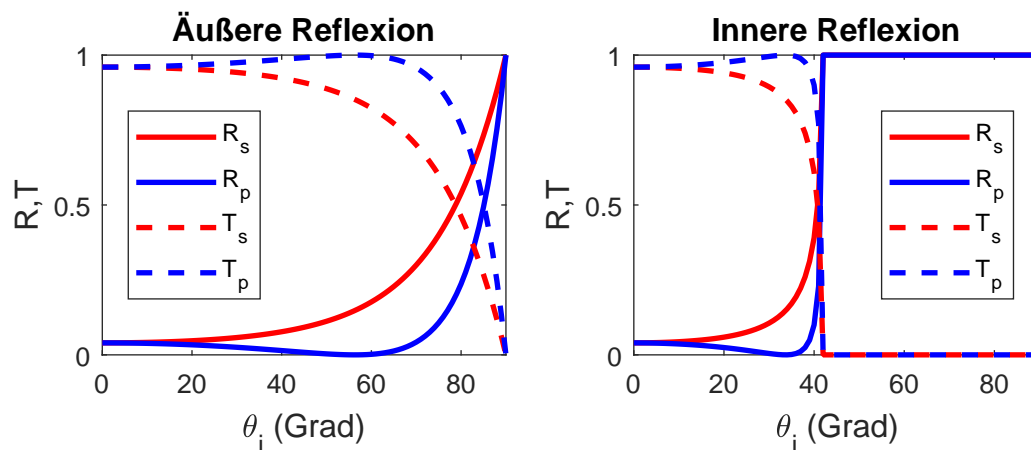


Abbildung 3.8: Reflexions- und Transmissionsgrad für eine Luft/Glas-Grenzfläche.

3.5.1 Totalreflexion und evaneszente Felder

Experiment: Totalreflexion von Mikrowellen am Wachsprisma (0736).

Wir wollen jetzt die Eigenschaften der Felder im optisch dünneren Medium bei Totalreflexion genauer untersuchen. Hierzu betrachten wir eine ebene Welle, die auf eine Grenzfläche mit $n_1 > n_2$ trifft (siehe Abbildung 3.9). Wir beschränken uns hier auf die s-Polarisation. Der Fall der p-Polarisation kann aber ganz analog behandelt werden.

3 Elektromagnetische Felder an Grenzflächen

Das gesamte elektrische Feld im optisch dichteren Medium (Brechungsindex n_1) ergibt sich aus der Überlagerung der einfallenden Welle und der reflektierten Welle:

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_r(\mathbf{r}, t) \quad (3.5.8)$$

mit

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_i e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (3.5.9)$$

$$\mathbf{E}_r(\mathbf{r}, t) = r \mathbf{E}_i e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (3.5.10)$$

Im optisch dünneren Medium (Brechungsindex n_2) kann das elektrische Feld geschrieben werden als:

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{r}, t) = t \mathbf{E}_i e^{i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (3.5.11)$$

Durch Einsetzen von $\mathbf{E}_t(\mathbf{r}, t)$ in die Helmholtzgleichung erhalten wir die Dispersionsrelation³:

$$\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{k}_t = (k_{t,z} \mathbf{e}_z + k_{t,x} \mathbf{e}_x) \cdot (k_{t,z} \mathbf{e}_z + k_{t,x} \mathbf{e}_x) = k_{t,z}^2 + k_{t,x}^2 = \frac{\omega^2 n_2^2}{c_0^2}. \quad (3.5.12)$$

Hierbei haben wir den Wellenvektor \mathbf{k}_t in eine Komponente $k_{t,z} \mathbf{e}_z$ parallel zur Grenzfläche und in eine Komponente $k_{t,x} \mathbf{e}_x$ senkrecht zur Grenzfläche aufgeteilt (siehe Abbildung 3.9).

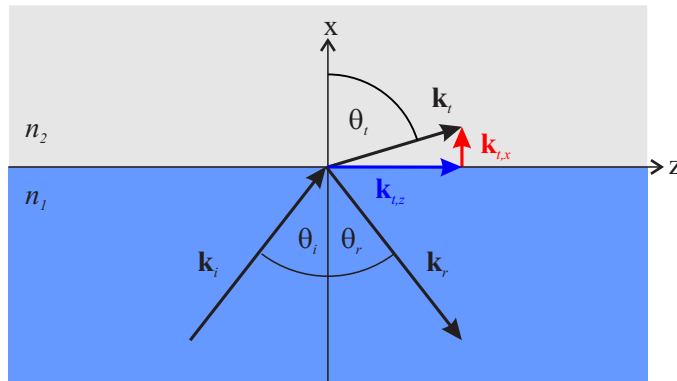


Abbildung 3.9: Grenzfläche zwischen zwei Medien mit $n_1 > n_2$.

Nach Gleichung (3.3.8) sind die Tangentialkomponenten der Wellenvektoren der drei Wellen gleich groß:

$$k_{i,z} = k_{r,z} = k_0 n_1 \sin(\theta_i) = k_0 n_2 \sin(\theta_t) = k_{t,z}. \quad (3.5.13)$$

Die Normalkomponente des Wellenvektors in Medium 2 ergibt sich damit zu:

$$k_{t,x} = k_0 n_2 \sqrt{1 - \sin^2(\theta_t)} = k_0 n_2 \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2(\theta_i)}. \quad (3.5.14)$$

³Wir nehmen an, dass $\hat{\mathbf{e}}_x$ und $\hat{\mathbf{e}}_z$ die Einfallsebene aufspannen.

3 Elektromagnetische Felder an Grenzflächen

Für $\theta_i > \alpha_g = \arcsin(n_2/n_1)$ wird $k_{t,x}$ eine imaginäre Größe und das elektrische Feld fällt exponentiell in Medium 2 ab. Eine solche Welle wird als evaneszent bezeichnet. Beispielsweise erhalten wir für s-Polarisation:

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{r}, t) = (0, t_s E_i, 0) e^{i(k_{t,z}z - \omega t)} e^{-qx} \quad (3.5.15)$$

mit

$$q = k_0 n_2 \sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2(\theta_i) - 1}. \quad (3.5.16)$$

Das zugehörige Magnetfeld in Medium 2 berechnet sich zu:

$$\mathbf{H}_t(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{-k_{t,z} t_s E_i}{\omega \mu_0}, 0, \frac{i q t_s E_i}{\omega \mu_0} \right) e^{i(k_{t,z}z - \omega t)} e^{-qx}. \quad (3.5.17)$$

Die z -Komponente des Magnetfeldes ist im Vergleich zum elektrischen Feld 90° außer Phase. Nach Gleichung (2.2.73) nimmt der zeitliche Mittelwert der x -Komponente des Poynting-Vektors damit den Wert Null an, d.h. bei Totalreflexion wird in Medium 2 keine Leistung abgestrahlt.

Wir wollen nun den Fall betrachten, dass eine Schicht eines optisch dünnen Mediums zwischen zwei optisch dichte Medien eingebettet wird. Ist die Schichtdicke d deutlich größer als die charakteristische Abfalllänge q , so beobachtet man auch bei diesem System für Einfallswinkel $\theta_i > \alpha_g$ die Totalreflexion der einfallenden Welle an der Grenzfläche zwischen dem ersten optisch dichten Medium und dem optisch dünnen Medium. Ist hingegen die Schichtdicke vergleichbar oder kleiner als die charakteristische Abfalllänge, so kann ein Teil der evaneszenten Welle in das zweite optisch dichte Medium transmittiert werden. Dieses Phänomen bezeichnet man als frustrierte Totalreflexion oder als optischen Tunneleffekt.

Experiment: [Tunneleffekt mit Mikrowellen \(0736\)](#).

3.5.2 Reflektion an einem Spiegel bei senkrechtem Lichteinfall

Perfekter Leiter

Experiment: [Stehende Mikrowelle](#).

Wir betrachten jetzt eine in x -Richtung linear polarisierte ebene Welle $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_{0i} \hat{\mathbf{e}}_x e^{i(k_z z - \omega t)}$, die bei $z = 0$ senkrecht auf einen ebenen Spiegel fällt. Wir nehmen zunächst an, der Spiegel sei ein perfekter Leiter. In der Physik II-Vorlesung haben wir gelernt, dass die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes an der Oberfläche eines perfekten Leiters verschwindet. Um diese Randbedingung zu allen Zeiten zu erfüllen, muss

3 Elektromagnetische Felder an Grenzflächen

die Welle am Spiegel komplett reflektiert werden. Das Feld vor dem Spiegel kann somit als Überlagerung der einlaufenden und der reflektierten Welle geschrieben werden:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_{0i} \hat{\mathbf{e}}_x e^{i(k_z z - \omega_0 t)} + E_{0r} \hat{\mathbf{e}}_x e^{i(-k_z z - \omega_0 t)}. \quad (3.5.18)$$

Mit der Bedingung $\mathbf{E}(z = 0, t) = 0$ folgt:

$$E_{0i} = -E_{0r}. \quad (3.5.19)$$

Somit erhalten wir:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re \left[E_{0i} \hat{\mathbf{e}}_x e^{i(k_z z - \omega_0 t)} - E_{0i} \hat{\mathbf{e}}_x e^{i(-k_z z - \omega_0 t)} \right] = 2E_{0i} \hat{\mathbf{e}}_x \sin(k_z z) \sin(\omega_0 t). \quad (3.5.20)$$

Wir sehen sofort, dass die Knoten des elektrischen Feldes sich nicht bewegen. Die Reflexion der ebenen Welle am perfekten Leiter führt also zur Ausbildung einer stehenden Welle.

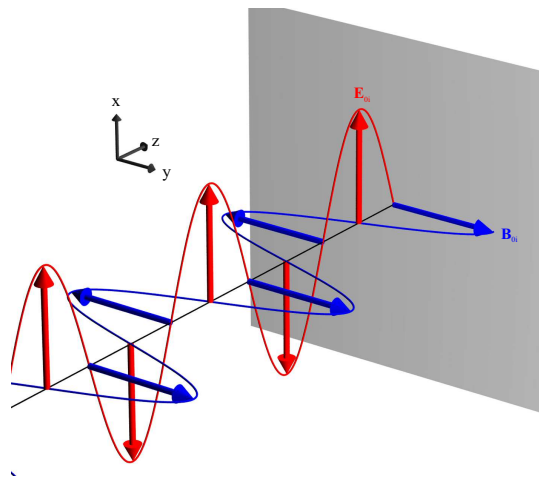


Abbildung 3.10: Stehende Welle vor einem ebenen perfekten Leiter.

Mit $\partial E_x / \partial z = -\partial B_y / \partial t$ ergibt sich für die magnetische Flussdichte:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 2B_{0i} \hat{\mathbf{e}}_y \cos(k_z z) \cos(\omega_0 t). \quad (3.5.21)$$

Hierbei ist $B_{0i} = E_{0i} k_z / \omega_0$. Das elektrische Feld und die magnetische Flussdichte einer stehenden Welle sind sowohl räumlich als auch zeitlich jeweils um eine viertel Periode außer Phase. Wir berechnen nun den Poynting-Vektor:

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\mu_0} = 4 \frac{k_z}{\mu_0 \omega_0} E_{0i}^2 \sin(k_z z) \cos(k_z z) \sin(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t) \hat{\mathbf{e}}_z. \quad (3.5.22)$$

Nach einer kurzen Rechnung⁴ sehen wir, dass der zeitliche Mittelwert des Poynting-Vektors verschwindet:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = 0. \quad (3.5.23)$$

Mit einer stehenden Welle ist im zeitlichen Mittel kein Energietransport verknüpft.

⁴Additionstheorem: $\sin(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} \sin(2\omega_0 t)$

Metallspiegel

Wir wollen nun die Reflexion an einem Metallspiegel analysieren. Wie wir in Abschnitt 2.5.2 gesehen haben, können wir dem Metall eine frequenzabhängige dielektrische Funktion $\epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega)$ bzw. einen Brechungsindex $n(\omega) = n'(\omega) + in''(\omega) = \sqrt{\epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega)}$ zuordnen. Einsetzen in die Fresnel-Gleichungen liefert bei senkrechtem Einfall für die Luft-Metall-Grenzfläche:

$$r = \frac{1 - (n' + in'')}{1 + (n' + in'')} = \frac{(1 - n') - in''}{(1 + n') + in''} \quad (3.5.24)$$

$$t = \frac{2}{1 + (n' + in'')} \quad (3.5.25)$$

Der zugehörige Reflexionsgrad berechnet sich zu:

$$R = |r|^2 = \frac{(1 - n')^2 + n''^2}{(1 + n')^2 + n''^2} \quad (3.5.26)$$

Unterhalb der Plasmafrequenz gilt für Metalle typischerweise $n' \ll n''$, so dass ein Reflexionsgrad $R \approx 1$ erreicht wird. Im Gegensatz zu einem perfekten Leiter kann das elektromagnetische Feld jedoch in das Metall eindringen ($t \neq 0$). Dort wird es exponentiell gedämpft. Als Skintiefe δ bezeichnet man die Eindringtiefe, bei der der Betrag des elektromagnetischen Feldes auf den 1/e-ten Teil des Wertes an der Oberfläche abgefallen ist. Nach Gleichung (2.2.44) gilt:

$$\delta = \frac{1}{k_0 n''} = \frac{\lambda_0}{2\pi n''} \quad (3.5.27)$$

Beispiel: Reflexion eines He-Ne-Lasers an einem Silberspiegel

- Brechungsindex (@ 632.8 nm): $n = 0.135 + i3.985$.
- Reflexionsgrad (@ 632.8 nm): $R = 0.97$.
- Skintiefe (@ 632.8 nm): $\delta = 25$ nm.

3.6 Dielektrische Wellenleiter

Experiment: Wellenleitung durch Totalreflexion.

Wir haben bereits bei der Behandlung der Totalreflexion im Rahmen der geometrischen Optik angesprochen, dass dieser Effekt genutzt werden kann, um Licht über lange Distanzen mit geringen Verlusten zu transportieren. Im Folgenden wollen wir die Wellenausbreitung in dielektrischen Wellenleitern genauer betrachten. Dabei nehmen wir an,

3 Elektromagnetische Felder an Grenzflächen

dass der Querschnitt des Wellenleiters sich entlang der Ausbreitungsrichtung nicht ändert. Weiterhin werden wir uns auf Stufenindex-Wellenleiter beschränken, bei denen der Brechungsindex ein Stufenprofil aufweist. (siehe Abbildung 3.11).

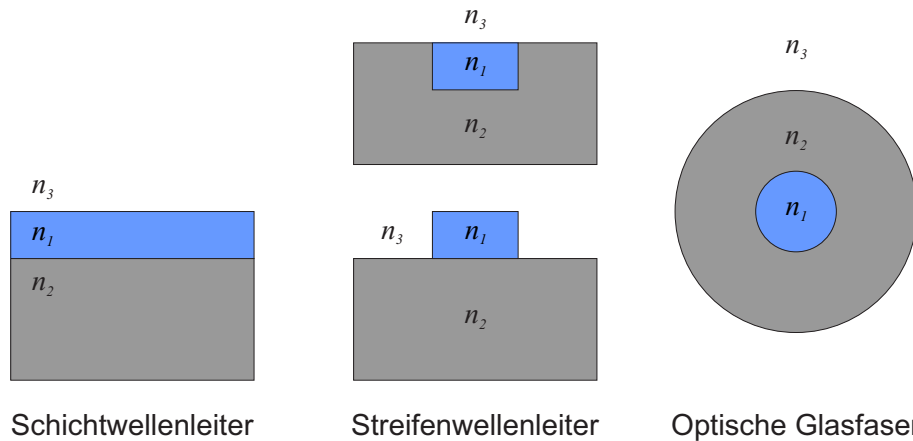


Abbildung 3.11: Querschnitte verschiedener Stufenindex-Wellenleiter. Die Brechungsindexprofile erfüllen die Bedingung $n_1 > n_2 \geq n_3$.

Bei der Untersuchung von Wellenleitern sind wir insbesondere an den Eigenschaften der Moden des Wellenleiters interessiert. Dies sind die Wellen $\mathbf{E}(x, y, z, t)$, die mit den durch die Wellenleitergeometrie vorgegebenen Randbedingungen kompatibel sind, und deren Feldverteilung entlang der Wellenleiterachse (hier $\hat{\mathbf{e}}_z$) gleich bleibt:

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}_m(x, y) e^{i(\beta z - \omega t)}. \quad (3.6.1)$$

Hierbei ist $\mathbf{E}_m(x, y)$ die für die jeweilige Mode charakteristische Feldverteilung und β ist die sogenannte Propagationskonstante. Man kann zeigen, dass sich jede im Wellenleiter propagierende Welle als Überlagerung von Wellenleitermoden darstellen lässt.

3.6.1 Schichtwellenleiter

Als einfaches Modellsystem für einen dielektrischen Wellenleiter wollen nun einen sogenannten Schichtwellenleiter untersuchen. Dieser besteht aus einem hochbrechenden Film (Brechungsindex n_1) der Dicke d , der zwischen zwei Halbräumen, dem Substrat (Brechungsindex n_2) und der Abdeckung (Brechungsindex n_3), eingebettet ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $n_1 > n_2 \geq n_3$ gilt.

Wie bei der Reflexion einer ebenen Welle an einer Grenzschicht können wir wieder zwei Polarisationszustände getrennt betrachten (siehe Abbildung 3.12):

- Transversal elektrische Moden (TE Moden, s-pol),
- Transversal magnetische Moden (TM Moden, p-pol).

3 Elektromagnetische Felder an Grenzflächen

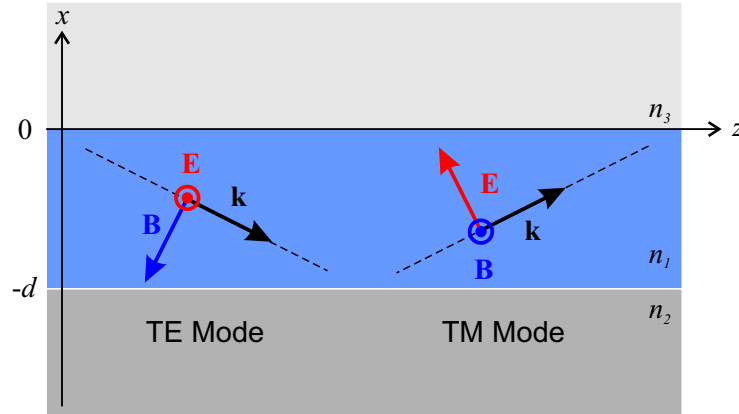


Abbildung 3.12: TE und TM Moden eines dielektrischen Schichtwellenleiters.

Im Folgenden werden wir uns auf die TE Moden konzentrieren. Der Fall der TM Moden kann analog behandelt werden.

In der Filmschicht ergeben sich die Moden aus der Überlagerung von propagierenden ebenen Wellen. Im Gegensatz hierzu sind die Felder im Substrat und in der Abdeckung evaneszent. Der folgende Ansatz für eine TE-Mode berücksichtigt unsere Überlegungen:

$$E_y(x, y, z, t) = E_m(x) e^{i(\beta z - \omega t)} \quad (3.6.2)$$

mit

$$E_m(x) = \begin{cases} C \exp(-px) & 0 \leq x \\ C \left[\cos(hx) - \frac{q}{h} \sin(hx) \right] & -d \leq x \leq 0 \\ C \left[\cos(hd) + \frac{q}{h} \sin(hd) \right] \exp(q(x+d)) & x \leq -d \end{cases} \quad (3.6.3)$$

Hierbei sind die Größen wie folgt definiert:

- Propagationskonstante (Parallelkomponente des Wellenvektors im Film):

$$\beta = k_0 n_1 \sin(\theta_i) \quad (3.6.4)$$

- Normalkomponente des Wellenvektors im Film:

$$h = k_0 n_1 \cos(\theta_i) = \sqrt{k_0^2 n_1^2 - \beta^2} \quad (3.6.5)$$

- Betrag der Normalkomponente des Wellenvektors im Substrat:

$$q = \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_2^2} \quad (3.6.6)$$

- Betrag der Normalkomponente des Wellenvektors in der Abdeckung:

$$p = \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_3^2} \quad (3.6.7)$$

3 Elektromagnetische Felder an Grenzflächen

Die zugehörige magnetische Flussdichte folgt aus $\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$. Anhand der Stetigkeitsbedingungen für E_y und H_z bei $x = 0$ und $x = -d$ erhalten wir:

$$\tan(hd) = \frac{p+q}{h(1-pq/h^2)}. \quad (3.6.8)$$

Nach kurzer Rechnung⁵ ergibt sich die folgende implizite Darstellung der Dispersionsrelation $\omega(\beta)$ der TE-Moden:

$$d\sqrt{k_0^2 n_1^2 - \beta^2} = \arctan\left(\sqrt{\frac{k_0^2(n_1^2 - n_2^2)}{k_0^2 n_1^2 - \beta^2} - 1}\right) + \arctan\left(\sqrt{\frac{k_0^2(n_1^2 - n_3^2)}{k_0^2 n_1^2 - \beta^2} - 1}\right) + m\pi. \quad (3.6.9)$$

Der Index m charakterisiert die verschiedenen Wellenleitermoden und kann die Werte $m = 0, 1, 2, \dots$ annehmen. Anschaulich beschreibt m die Anzahl der Knoten des elektrischen Feldes in der Filmschicht. Durch numerische Lösung dieser Gleichung können wir die Dispersionsrelation $\omega(\beta)$ berechnen.

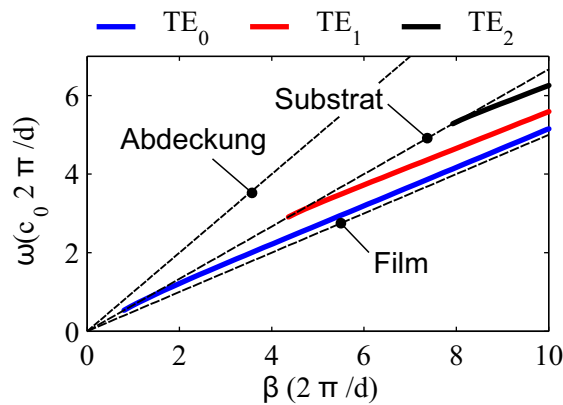


Abbildung 3.13: Dispersionsrelation der TE₀, TE₁ und TE₂- Mode. Beispielparameter: $n_1 = 2.0$, $n_2 = 1.5$ und $n_3 = 1.0$.

Der obige Ansatz beschreibt nur dann eine geführte Welle, falls p und q reellwertige Größen sind. Für $\beta < k_0 n_2$ wird q komplex und die Welle kann sich somit im Substrat ausbreiten. Die Abschneidefrequenz der m -ten Mode kann daher aus der Bedingung $q = 0$ bestimmt werden:

$$\omega_{cut,TE} = \frac{c_0 \left(\arctan\left(\sqrt{\frac{n_2^2 - n_3^2}{n_1^2 - n_2^2}}\right) + m\pi \right)}{d\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} \quad (3.6.10)$$

Für einen symmetrischen Wellenleiter ($n_2 = n_3$) ist die TE₀-Mode immer geführt, d.h., $\omega_{cut,TE0} = 0$.

⁵ $\arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = \arctan(x) + \arctan(y)$

3 Elektromagnetische Felder an Grenzflächen

Die Dispersionsrelation $\omega(\beta)$ kann qualitativ anhand des Moden-Profiles erklärt werden: Nahe der Abschneidefrequenz fällt die Mode im Substrat nur langsam ab, so dass ein Großteil des Feldes sich dort befindet. Daher verhält sich die Mode „substratartig“ und folgt der Substrat-Lichtlinie $\omega = \beta c_0/n_2$. Mit zunehmender Frequenz erfolgt eine Konzentration der Mode in der Filmschicht. Damit wird sie „filmartiger“ und nähert sich der Film-Lichtlinie $\omega = \beta c_0/n_1$.

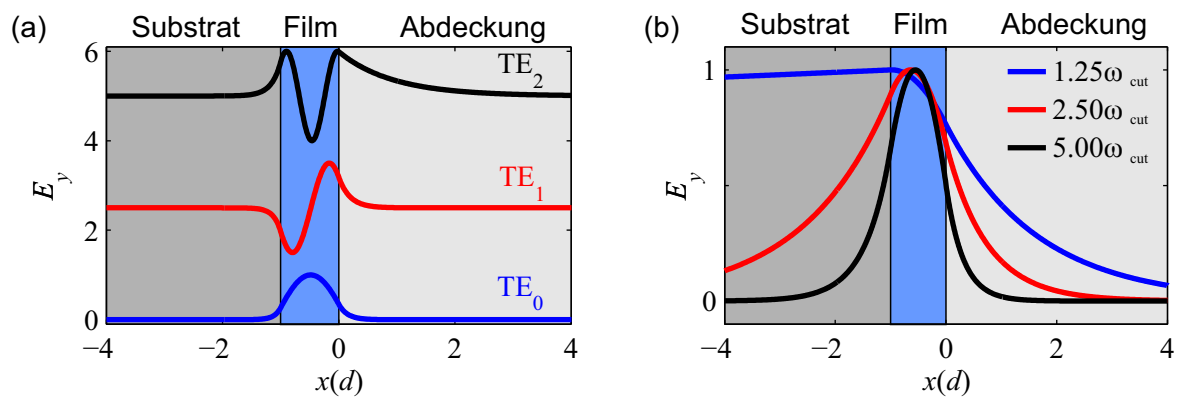


Abbildung 3.14: (a) Modenprofil der TE_0 , der TE_1 und der TE_2 - Mode. Beispielparameter: $n_1 = 2$, $n_2 = 1.5$, $n_3 = 1.0$, $\lambda = 2d$. (b) Modenprofil der TE_0 -Mode für verschiedene Frequenzen.

Tipp: 1-D mode solver for dielectric multilayer slab waveguides:
<https://www.computational-photonics.eu/oms.html>

3.6.2 Optische Glasfasern

Eine optische Glasfaser ist ein dielektrischer Wellenleiter mit typischerweise zylindersymmetrischen Querschnitt. Im Folgenden konzentrieren wir uns auf Stufenindex-Glasfasern, bei denen der lichtführende Kern (Brechungsindex n_1) in ein Material mit etwas niedrigerem Brechungsindex n_2 (Mantel) eingebettet ist (siehe Abbildung 3.15).

Optische Glasfasern spielen eine wichtige Rolle in der modernen Telekommunikation und bilden die „Nervenbahnen“ des Internets. Charles Kuen Kao, einer der Pioniere auf diesem Gebiet, wurde 2009 der Nobel-Preis in Physik für seine bahnbrechenden Beiträge zum Gebiet der Lichtleitung mittels Glasfasern verliehen.

Typische Parameter einer monomodigen Telekommunikations-Glasfaser

- Betriebs-Wellenlänge: $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$ (geringe Absorptionsverluste).

3 Elektromagnetische Felder an Grenzflächen

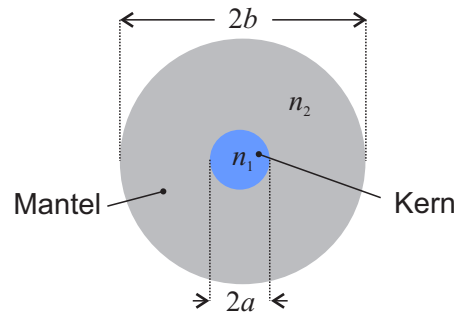


Abbildung 3.15: Schematischer Querschnitt einer Stufenindex-Glasfaser.

- Mantel: Ultrareines Quarz-Glas ($n_2 = 1.46$).
- Kern: Germanium dotiertes Quarz-Glas.
- Relative Brechzahldifferenz für typische Dotierkonzentrationen:

$$\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1} \approx 0.01 - 0.02. \quad (3.6.11)$$

- Geometrische Abmessungen:
 - Kern-Durchmesser: $2a = 8 \mu\text{m}$.
 - Mantel-Durchmesser: $2b = 125 \mu\text{m}$.

Aufgrund der geringen relativen Brechzahldifferenz sind die Moden typischer Glasfasern in sehr guter Näherung transversale Wellen, d.h., die Komponenten des elektromagnetischen Feldes entlang der Zylinderachse können vernachlässigt werden.

Stufenindex-Glasfasern können anhand des sogenannten V -Parameters

$$V = \frac{2\pi a}{\lambda_0} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (3.6.12)$$

charakterisiert werden. Man kann zeigen, dass für $V < 2.405$ sich nur ein Mode entlang der Glasfaser ausbreitet. Man spricht in diesem Fall von einer Monomodefaser. Für Werte von $V > 2.405$ werden weitere Moden geführt und man bezeichnet die Glasfaser dementsprechend als Multimodefaser.

Absorption und Streuung in der Glasfaser führen zu einem exponentiellen Abfall der Lichtleistung $P(L)$ mit der Propagationslänge L . Der zugehörige Absorptionsgrad α wird üblicherweise in dB/km angegeben:

$$\alpha = \frac{1}{L} 10 \log_{10} \left(\frac{1}{T(L)} \right), \quad (3.6.13)$$

3 Elektromagnetische Felder an Grenzflächen

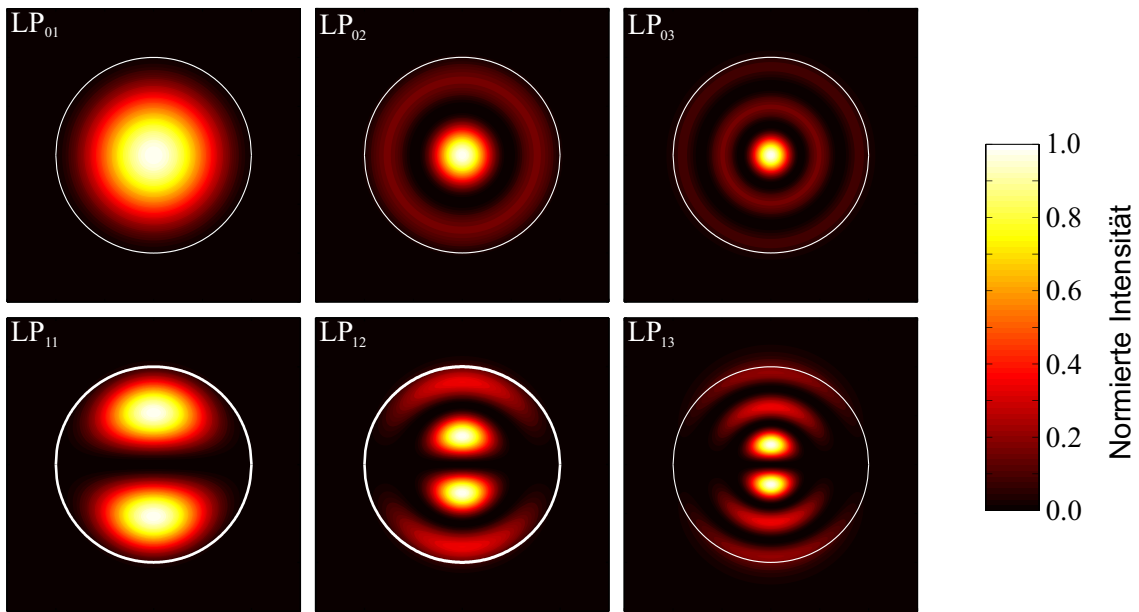


Abbildung 3.16: Intensitätsprofil einiger Glasfaser-Moden ($V = 10$). Die weiße Linie markiert die Grenze zwischen dem Kern und dem Mantel.

wobei $T(L) = P(L)/P(0)$ der Transmissionsgrad der optischen Glasfaser ist. Der Absorptionsgrad einer typischen Telekommunikations-Glasfaser ist in Abbildung 3.17 schematisch dargestellt.

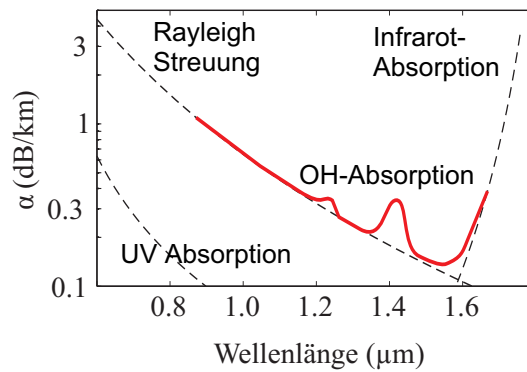


Abbildung 3.17: Absorptionsgrad einer typischen Telekommunikations-Glasfaser.

3.7 Ausblick in die Forschung: Oberflächen-Plasmon-Polaritonen

In Abschnitt 3.5.2 haben wir gesehen, dass Licht in Metallen für Frequenzen ω unterhalb der Plasmafrequenz ω_p stark gedämpft wird. Beispielsweise beträgt die Propagationslänge von sichtbarem Licht in Silber weniger als 50 nm. Jedoch können an der Grenzfläche zwischen einem Metall ($\epsilon_m < 0$) und einem Dielektrikum ($\epsilon_d > 0$) Oberflächenwellen, sogenannte Oberflächen-Plasmon-Polaritonen (eng: surface plasmon polariton, SPP) existieren. Diese stellen einen Mischzustand aus einer elektromagnetischen Welle und einer longitudinalen Elektronen-Dichte-Welle dar.

Im folgenden suchen wir die Feldverteilung für eine Oberflächenwelle, die entlang der Grenzfläche in \hat{e}_z -Richtung läuft und in den beiden Medien exponentiell abfällt. Wir probieren hierzu den folgenden Ansatz für die magnetische Feldstärke:

$$\mathbf{H}^+(x > 0, y, z, t) = (0, A, 0) e^{i(k_{\text{SPP}}z - \omega t)} e^{-k_x^+ x} \quad (\text{Dielektrikum}), \quad (3.7.1)$$

$$\mathbf{H}^-(x < 0, y, z, t) = (0, B, 0) e^{i(k_{\text{SPP}}z - \omega t)} e^{k_x^- x} \quad (\text{Metall}). \quad (3.7.2)$$

Die zugehörige elektrische Feldstärke berechnet sich zu:

$$\mathbf{E}^+(x > 0, y, z, t) = \left(\frac{k_{\text{SPP}} A}{\omega \epsilon_0 \epsilon_d}, 0, \frac{-ik_x^+ A}{\omega \epsilon_0 \epsilon_d} \right) e^{i(k_{\text{SPP}}z - \omega t)} e^{-k_x^+ x} \quad (\text{Dielektrikum}) \quad (3.7.3)$$

$$\mathbf{E}^-(x < 0, y, z, t) = \left(\frac{k_{\text{SPP}} B}{\omega \epsilon_0 \epsilon_m}, 0, \frac{ik_x^- B}{\omega \epsilon_0 \epsilon_m} \right) e^{i(k_{\text{SPP}}z - \omega t)} e^{k_x^- x} \quad (\text{Metall}) \quad (3.7.4)$$

Aus den Stetigkeitsbedingungen für H_y und E_z an der Grenzfläche folgt:

$$A = B, \quad (3.7.5)$$

$$\frac{k_x^+}{\epsilon_d} = -\frac{k_x^-}{\epsilon_m}. \quad (3.7.6)$$

Weiterhin finden wir durch das Einsetzen des obigen Ansatzes in die Helmholtzgleichung:

$$k_{\text{SPP}}^2 - (k_x^+)^2 = \epsilon_d \frac{\omega^2}{c_0^2}, \quad (3.7.7)$$

$$k_{\text{SPP}}^2 - (k_x^-)^2 = \epsilon_m \frac{\omega^2}{c_0^2}. \quad (3.7.8)$$

Durch Umformen erhalten wir dann nach einer kurzen Rechnung die SPP-Dispersionsrelation:

$$k_{\text{SPP}} = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\frac{\epsilon_d \epsilon_m}{\epsilon_d + \epsilon_m}}. \quad (3.7.9)$$

3 Elektromagnetische Felder an Grenzflächen

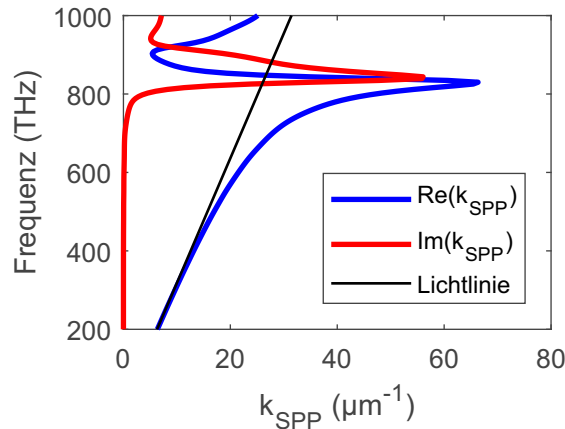


Abbildung 3.18: Dispersionsrelationen für SPPs an den Grenzflächen zwischen Silber und Glas.

Über einen weiten Frequenzbereich ist die SPP-Propagationskonstante k_{SPP} größer als die Wellenzahl $k = k_0\sqrt{\epsilon_d}$. SPPs können in diesem Fall nicht in das Dielektrikum abstrahlen oder lassen sich umgekehrt mit der Hilfe von ebenen Wellen aus dem Dielektrikum anregen. Zur Kopplung von Licht an SPPs werden deshalb spezielle Techniken benötigt (siehe Abbildung 3.19).

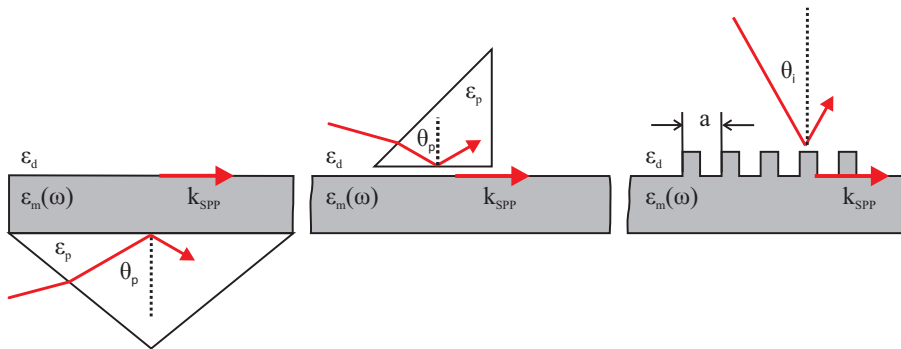


Abbildung 3.19: Anregung von SPPs mittels Prismen oder Gitter.

SPPs ermöglichen es starke elektromagnetische Felder in der Nähe von Metalloberflächen zu erzeugen. Dieser Effekt wird bei der Oberflächen-Plasmonen-Resonanzspektroskopie zum empfindlichen Nachweis von Biomolekülen verwendet (siehe Abbildung 3.20). Hierzu wird ein dünner Goldfilm auf die Basisfläche eines Prismas aufgebracht. Der Goldfilm wird mit einer funktionalen Schicht versehen, die typischerweise eine Monolage dick ist. Über das Prisma werden SPPs an der oberen Grenzschicht angeregt. Die nachzuweisenden Moleküle können nach dem Schlüssel-Schloss-Prinzip spezifisch an die funktionale Schicht binden. Durch die angekoppelten Moleküle ändert sich die dielektrische Funktion der funktionalen Schicht geringfügig $\epsilon_{ml} \rightarrow \epsilon_{ml} + \delta\epsilon$. Da das elektromagnetische Feld des

3 Elektromagnetische Felder an Grenzflächen

Oberflächen-Plasmon-Polaritons an der Grenzfläche konzentriert ist, führt dies zu einer messbaren Variation der Anregebedingung für das Oberflächen-Plasmon-Polariton. Zum Nachweis kann dann entweder eine Änderung des SPP-Anrege-Winkels θ_p oder der SPP-Resonanz-Wellenlänge genutzt werden.

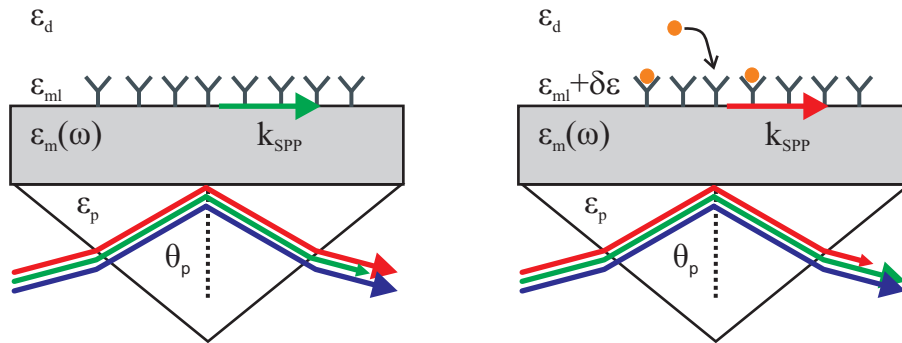


Abbildung 3.20: Prinzip der Oberflächen-Plasmonen-Resonanzspektroskopie.

4 Polarisation

Licht besitzt als elektromagnetische Welle vektoriellen Charakter. Mit diesem Aspekt, der Polarisation des Lichts, wollen wir uns in diesem Kapitel ausführlich befassen. Wir betrachten hierzu als erstes Wellen mit definiertem Polarisationszustand, d.h., Wellen deren Amplitudenvektor räumlich und zeitlich konstant ist. Im Anschluss daran diskutieren wir verschiedene Effekte und darauf basierende optische Elemente, die genutzt werden können, um den Polarisationszustand einer Welle zu manipulieren. Zum Abschluss lernen wir den Jones Formalismus kennen, der die effiziente Berechnung des Polarisationszustandes einer ebenen Welle nach der Transmission durch verschiedene optische Elemente erlaubt.

4.1 Wellen mit definiertem Polarisationszustand

Gegeben sei eine monochromatische elektromagnetische Welle, die sich entlang der z -Achse in einem isotropen, homogenen Medium ausbreitet. Die zugehörige elektrische Feldstärke schreiben wir als:

$$\mathbf{E}(z, t) = \Re \left\{ \mathbf{A} e^{i(kz - \omega t)} \right\}, \quad (4.1.1)$$

wobei

$$\mathbf{A} = A_x \hat{\mathbf{e}}_x + A_y \hat{\mathbf{e}}_y = a_x \hat{\mathbf{e}}_x + a_y e^{i\varphi} \hat{\mathbf{e}}_y \quad (4.1.2)$$

ein komplexer Amplitudenvektor¹ ist. Die Welle hat einen definierten Polarisationszustand, wenn der Amplitudenvektor \mathbf{A} räumlich und zeitlich konstant ist. Dieser Polarisationszustand kann durch die Kurve charakterisiert werden, die der Endpunkt des elektrischen Feldvektors für eine fixe Position $z = z_0$ beschreibt:

$$\mathbf{E}(z = z_0, t) = E_x \hat{\mathbf{e}}_x + E_y \hat{\mathbf{e}}_y \quad (4.1.3)$$

mit

$$E_x = a_x \cos(kz_0 - \omega t), \quad (4.1.4)$$

$$E_y = a_y \cos(kz_0 - \omega t + \varphi). \quad (4.1.5)$$

¹Durch geeignete Wahl des Zeitnullpunkts können wir immer eine Darstellung finden, so dass A_x reell ist

4.1.1 Linear polarisierte ebene Wellen

Die elektromagnetische Welle wird als linear polarisiert bezeichnet, wenn der elektrische Feldvektor $\mathbf{E}(z = z_0, t)$ entlang einer Linie in der xy -Ebene hin und her oszilliert. Dies ist der Fall, wenn entweder eine der beiden Komponenten des Amplitudenvektors verschwindet ($a_x = 0$ oder $a_y = 0$) oder falls die beiden elektrischen Feldkomponenten exakt in Phase ($\varphi = 0$) oder außer Phase ($\varphi = \pi$) schwingen.

Es lässt sich immer ein geeignetes kartesisches Koordinatensystem $(x'y'z)$ finden, so dass das elektrische Feld einer linear polarisierten Welle in der folgenden Form angegeben werden kann:

$$\mathbf{E}(z, t) = a_{x'} \hat{\mathbf{e}}_{x'} \cos(kz - \omega t). \quad (4.1.6)$$

Der Vektor $\hat{\mathbf{e}}_{x'}$ definiert die Polarisationsrichtung der linear polarisierten Welle.

Laut Gleichung (4.1.2) kann jede ebene Welle als Überlagerung von zwei orthogonalen, linear polarisierten Wellen aufgefasst werden. Hierbei entscheiden sowohl die Amplituden als auch der Phasenunterschied φ zwischen den beiden linear polarisierten Wellen über den Polarisationszustand der resultierenden ebenen Welle.

4.1.2 Zirkular polarisierte ebene Wellen

Wir betrachten nun den Fall, dass die x - und y -Komponente des elektrischen Felds den selben Betrag ($a_x = a_y = a$) aufweisen aber 90° außer Phase schwingen:

$$\mathbf{E}(z = z_0, t) = a \hat{\mathbf{e}}_x \cos(kz_0 - \omega t) + a \hat{\mathbf{e}}_y \cos\left(kz_0 - \omega t \pm \frac{\pi}{2}\right), \quad (4.1.7)$$

$$= a \hat{\mathbf{e}}_x \cos(kz_0 - \omega t) \mp a \hat{\mathbf{e}}_y \sin(kz_0 - \omega t). \quad (4.1.8)$$

Rechtszirkular polarisierte Welle

Die Phasenverschiebung $\varphi = -\pi/2$ führt zu einer sogenannten rechtszirkular polarisierten Welle:

$$\mathbf{E}_R(z = z_0, t) = a \hat{\mathbf{e}}_x \cos(kz_0 - \omega t) + a \hat{\mathbf{e}}_y \sin(kz_0 - \omega t). \quad (4.1.9)$$

Für einen festen aber beliebigen Wert $z = z_0$ dreht sich die Spitze des elektrischen Feldvektors mit der Winkelgeschwindigkeit ω in der xy -Ebene im Kreis. Blickt man in Richtung der Lichtquelle (also entgegen der Propagationsrichtung), so wird der Kreis im Uhrzeigersinn durchlaufen. Zu einem festen aber beliebigen Zeitpunkt $t = t_0$ beschreibt die Spitze des elektrischen Feldvektors eine rechtshändige Schraubenlinie, wenn man in Propagationsrichtung blickt. Der elektrische Feldvektor vollführt pro Wellenlänge eine vollständige Drehung.

4 Polarisation

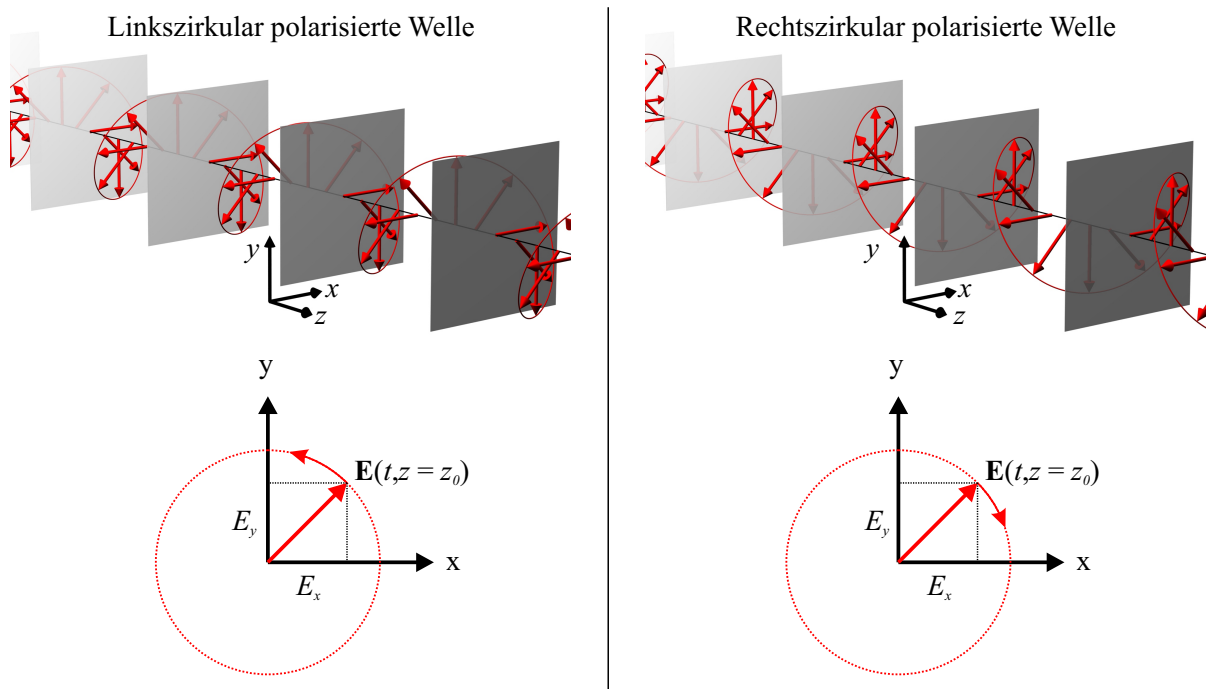


Abbildung 4.1: Linkszirkular polarisierte Welle und rechtszirkular polarisierte Welle.

Linkszirkular polarisierte Welle

Für $\varphi = \pi/2$ erhalten wir eine sogenannte linkszirkular polarisierte Welle :

$$\mathbf{E}_L(z = z_0, t) = a\hat{\mathbf{e}}_x \cos(kz_0 - \omega t) - a\hat{\mathbf{e}}_y \sin(kz_0 - \omega t). \quad (4.1.10)$$

Hält man wieder den Ort fest und blickt entgegen der Ausbreitungsrichtung, so dreht sich nun der elektrische Feldvektor im Gegenuhrzeigersinn in der xy -Ebene. Blickt man zu einem festen Zeitpunkt $t = t_0$ in Propagationsrichtung, so beschreibt die Spitze des elektrischen Feldvektors eine linkshändige Schraubenlinie.

Überlagerung zirkular polarisierter Wellen

Laut Gleichungen (4.1.9) und (4.1.10) ergeben sich links- und rechtszirkular polarisierte Wellen als Überlagerung von linear polarisierten Wellen mit einer Phasenverschiebung von $\varphi = \pm\pi/2$. Umgekehrt zeigt das folgende Beispiel, dass man durch die Überlagerung einer links- und einer rechtszirkular polarisierten Welle mit gleicher Amplitude eine linear polarisierte Welle erhält:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_R + \mathbf{E}_L &= a\hat{\mathbf{e}}_x \cos(kz - \omega t) + a\hat{\mathbf{e}}_y \sin(kz - \omega t) + \\ & a\hat{\mathbf{e}}_x \cos(kz - \omega t) - a\hat{\mathbf{e}}_y \sin(kz - \omega t) \\ &= 2a\hat{\mathbf{e}}_x \cos(kz - \omega t). \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

Durch die Wahl einer geeigneten Phasenverschiebung zwischen den beiden zirkular polarisierten Wellen kann die Polarisationsrichtung der resultierenden linear polarisierten Welle eingestellt werden (Beweis: Übung).

4.1.3 Elliptisch polarisierte ebene Wellen

Abgesehen von den oben besprochenen Spezialfällen beschreibt die Spitze des elektrischen Feldvektors eine Ellipse in der xy -Ebene. Um dies zu zeigen schreiben wir die Gleichungen (4.1.4) und (4.1.5) als:

$$\frac{E_x}{a_x} = \cos(kz_0 - \omega t) \quad (4.1.12)$$

$$\frac{E_y}{a_y} = \cos(kz_0 - \omega t + \varphi) = \cos(kz_0 - \omega t) \cos(\varphi) - \sin(kz_0 - \omega t) \sin(\varphi). \quad (4.1.13)$$

Als nächstes berechnen wir

$$\frac{E_y}{a_y} - \frac{E_x}{a_x} \cos(\varphi) = -\sin(kz_0 - \omega t) \sin(\varphi). \quad (4.1.14)$$

Durch das Quadrieren von Gleichung (4.1.14) und durch die Verwendung von

$$\sin(kz_0 - \omega t) = \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{a_x}\right)^2} \quad (4.1.15)$$

erhalten wir:

$$\left(\frac{E_x}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{a_y}\right)^2 - 2\frac{E_x}{a_x}\frac{E_y}{a_y}\cos(\varphi) = \sin^2(\varphi). \quad (4.1.16)$$

Diese Gleichung beschreibt eine Ellipse in der xy -Ebene. Daher spricht man von elliptisch polarisiertem Licht. Abbildung 4.2 zeigt exemplarisch die Kurve der Spitze des elektrischen Feldvektors für $a_x = a_y$ und verschiedene Werte von φ .

4 Polarisation

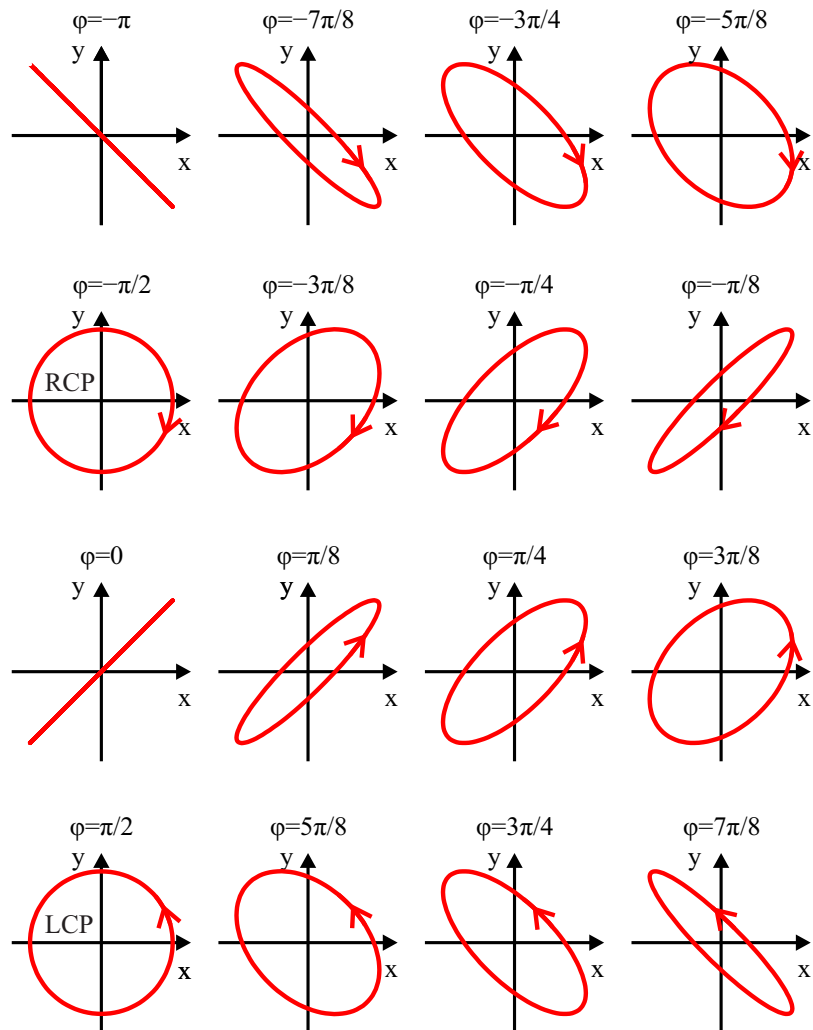


Abbildung 4.2: Beispiele für elliptisch polarisierte ebene Wellen mit $a_x = a_y$. RCP und LCP stehen für rechtszirkular bzw. linkszirkular polarisiertes Licht

4.2 Polarisatoren

Experiment: Transmission durch einen Turmalin-Kristall.

Experiment: Polaroid-Folien.

Experiment: Drahtpolarisator.

Viele Lichtquellen, etwa die Sonne, senden unpolarisiertes Licht aus, dessen Polarisationszustand sich sehr schnell und statistisch ändert. Ein Polarisator ist ein optisches Element, das unpolarisiertes Licht nach der Transmission/Reflexion in einen definierten Polarisationszustand überführt. In der Praxis spielen vor allem Linearpolarisatoren eine große Rolle, die unpolarisiertes Licht in linear polarisiertes Licht wandeln. Hierbei wird nur Licht, dessen elektrischer Feldvektor in der Richtung der Durchlassachse \hat{e}_D des Polarisators schwingt, durchgelassen. Fällt unpolarisiertes Licht der Intensität I_0 auf einen idealen Linearpolarisator (keine Verluste entlang der Durchlassrichtung), so besitzt die transmittierte linear polarisierte Welle die Intensität $1/2 I_0$.

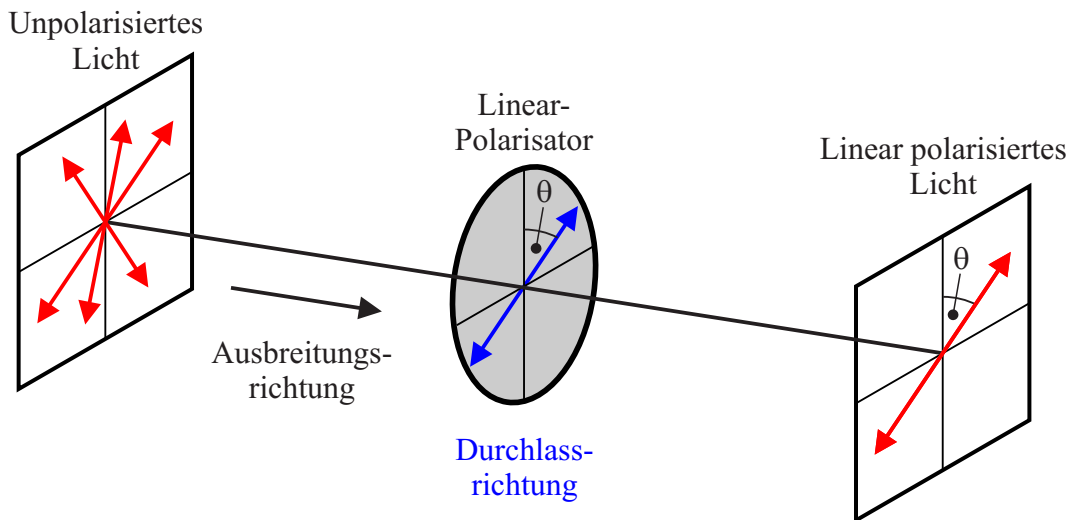


Abbildung 4.3: Erzeugung von linear polarisiertem Licht mit der Hilfe eines Linearpolarisators.

Zur Realisierung eines Linearpolarisators können verschiedene optische Effekte genutzt werden:

- Reflexion an einer dielektrischen Grenzfläche unter dem Brewsterwinkel (siehe Abschnitt 3.3).
- Transmission durch ein dichroitische („zweifarbige“) Medium, das einen bestimmten Polarisationszustand selektiv absorbiert oder reflektiert.

Drahtgitterpolarisatoren für Mikrowellen- und Infrarotstrahlung bestehen aus einer Anordnung parallel ausgerichteter metallischer Drähte, deren Abstände kleiner als

4 Polarisation

die Wellenlänge sind. Eine parallel zu den Drähten polarisierte elektromagnetische Welle erzeugt in diesen einen oszillierenden elektrischen Strom. Dieser Strom ist die Quelle für eine elektromagnetische Welle, die um 180° gegenüber der einfallenden Welle phasenverschoben ist (Grund: Randbedingung für ein Metall). In Vorwärtsrichtung löschen sich die einfallende und die erzeugte Welle aus. Damit bleibt nur die in Rückwärtsrichtung abgestrahlte (reflektierte) Welle übrig. Ist die einfallende Welle dagegen senkrecht zu den Drähten polarisiert, so kann kein Strom angeregt werden und die Welle wird transmittiert.

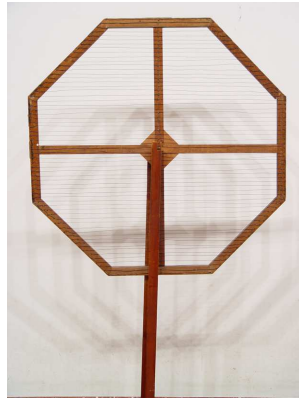


Abbildung 4.4: Original Drahtgitterpolarisator von Heinrich Hertz. Foto: Michael Kortmann.

Für Polaroidfilter verwendet man eine Polyvinylalkohol-Folie (PVA), die Jodkristallite enthält. Während der Fertigung wird die PVA-Folie erhitzt und gestreckt, so dass es für die Orientierung der Polymerketten eine Vorzugsrichtung gibt. Die Jodkristallite lagern sich hierbei bevorzugt entlang der Polymerketten an. Dies führt zu einer erhöhten elektrischen Leitfähigkeit in Richtung der Polymerketten. Analog zu einem Drahtgitterpolarisator wird Licht mit der Polarisationsrichtung entlang der Vorzugsrichtung stärker absorbiert als eine hierzu senkrecht polarisierte Welle.

- Weiterhin kann linear polarisiertes Licht mit der Hilfe von Doppelbrechung (siehe Abschnitt 4.3.3) erzeugt werden.

Experiment: Polarisationsfolien auf OHP.

Wir betrachten jetzt zwei ideale Linearpolarisatoren, deren Durchlassrichtungen \hat{e}_{D1} und \hat{e}_{D2} um den Winkel θ gegeneinander verdreht sind. Damit gilt:

$$\hat{e}_{D1} \cdot \hat{e}_{D2} = \cos(\theta). \quad (4.2.1)$$

Hinter dem ersten Polarisator besitzt die Welle den Amplitudenvektor:

$$\mathbf{E}_1 = E_1 \hat{e}_{D1}. \quad (4.2.2)$$

Der zweite Polarisator (Analysator) läßt nur die Feldkomponente in der Durchlassrichtung \hat{e}_{D2} passieren. Zerlegen wir nun \hat{e}_{D1} in eine Komponente parallel und senkrecht zu \hat{e}_{D2} ,

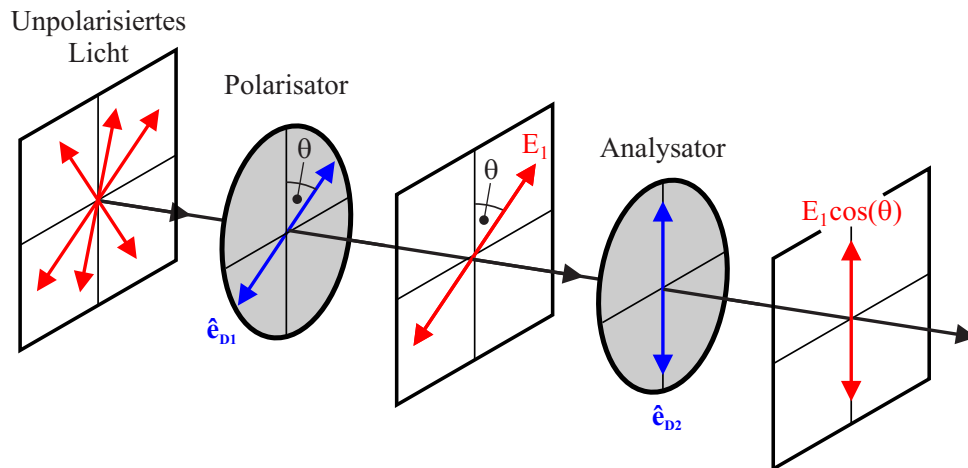


Abbildung 4.5: Kombination von zwei Linearpolarisatoren.

so erhalten wir den Amplitudenvektor der Welle hinter dem Analysator:

$$\mathbf{E}_2 = (\mathbf{E}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_{D2}) \hat{\mathbf{e}}_{D2} = E_1 \cos(\theta) \hat{\mathbf{e}}_{D2}. \quad (4.2.3)$$

Die Intensität der Welle hinter dem Analysator folgt damit dem Malusschen Gesetz:

$$I(\theta) = I_1 \cos^2(\theta). \quad (4.2.4)$$

4.3 Wellen in anisotropen Medien

Experiment: Doppelbrechung an Kalkspat.

Bisher haben wir Wellen in isotropen Medien untersucht. Wir wollen nun den Fall betrachten, dass die in einem Medium angeregten elektrischen Dipole nicht parallel zum elektrischen Feld der eingestrahlten Welle schwingen, d.h., $\mathbf{D} \not\parallel \mathbf{E}$. Anschaulich können wir ein solches anisotropes Medium mit dem Lorentz-Oszillator Modell beschreiben, wenn wir annehmen, dass in unterschiedlichen Raumrichtungen verschieden starke „Federkräfte“ wirken.

Die elektrische Permittivität ϵ eines anisotropen Mediums ist ein Tensor zweiter Ordnung:

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix}. \quad (4.3.1)$$

Die elektrische Flussdichte \mathbf{D} im Medium ergibt sich aus:

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}. \quad (4.3.2)$$

4 Polarisation

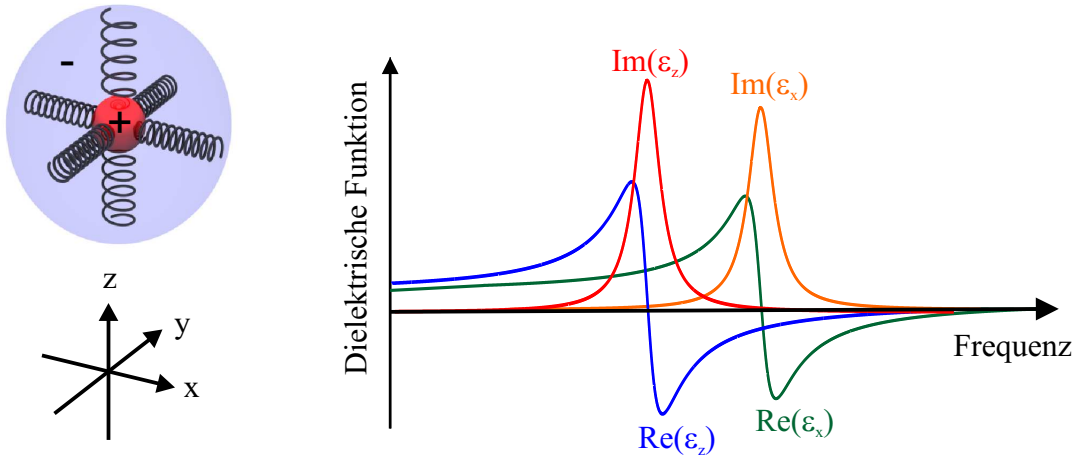


Abbildung 4.6: Anisotroper Lorentz-Oszillator.

Für jeden anisotropen Kristall existiert ein Koordinatensystem (x, y, z) in dem ϵ nur Diagonalelemente besitzt:

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (4.3.3)$$

Die entsprechenden Koordinatenachsen \hat{e}_x , \hat{e}_y und \hat{e}_z werden als die Hauptachsen des Kristalls bezeichnet. Ist das elektrische Feld \mathbf{E} entlang einer dieser Hauptachsen polarisiert, so ist auch die elektrische Flussdichte \mathbf{D} in dieser Richtung orientiert. Die Brechungsindizes der Hauptachsen berechnen sich zu

$$n_x = \sqrt{\epsilon_{xx}}, \quad n_y = \sqrt{\epsilon_{yy}}, \quad n_z = \sqrt{\epsilon_{zz}}. \quad (4.3.4)$$

Für die folgende Betrachtung ist es nützlich, die elektrische Feldstärke \mathbf{E} als Funktion der elektrischen Flussdichte \mathbf{D} anzugeben:

$$\mathbf{E} = \frac{\boldsymbol{\eta}}{\epsilon_0} \mathbf{D}. \quad (4.3.5)$$

Hierzuführen wir die elektrische Impermeabilität ein:

$$\boldsymbol{\eta} = \epsilon^{-1}. \quad (4.3.6)$$

Man sieht sofort, dass $\boldsymbol{\eta}$ im Hauptachsen-Koordinatensystem ebenfalls diagonal ist:

$$\eta_{ii} = \frac{1}{\epsilon_{ii}} = \frac{1}{n_i^2}. \quad (4.3.7)$$

4.3.1 Uniaxiale Kristalle

Im Folgenden konzentrieren wir uns auf uniaxiale Kristalle, bei denen zwei der Hauptachsen-Brechungsindizes identisch sind ($n_x = n_o$, $n_y = n_o$ und $n_z = n_e$):

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n_o^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_o^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n_e^2} \end{pmatrix}. \quad (4.3.8)$$

In der Literatur haben sich die Bezeichnungen ordentlicher und außerordentlicher Brechungsindex für n_o bzw. n_a eingebürgert. Die Symmetrieachse (hier z -Achse) wird als optische Achse bezeichnet. Kristalle mit $n_e < n_o$ nennt man negativ uniaxiale Kristalle, während positiv uniaxiale Kristalle durch die Bedingung $n_e > n_o$ charakterisiert werden.

Brechungsindizes einiger uniaxialer Kristalle für die Wellenlänge $\lambda = 589 \text{ nm}$.

	n_o	n_e
Kalkspat	1.6584	1.4864
Quarz	1.5443	1.5534
Rutil	2.616	2.903
Turmalin	1.669	1.638

Im Folgenden wollen wir die Ausbreitung einer ebenen Welle in einem uniaxialen Kristall näher betrachten. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass der Wellenvektor \mathbf{k} in der yz -Ebene liegt (d.h., $\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x = 0$) und mit der optischen Achse den Winkel θ einschließt. Aus den Maxwellgleichungen folgt für eine ebene Welle mit Wellenvektor \mathbf{k} :

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (4.3.9)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (4.3.10)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \mu_0 \omega \mathbf{H}, \quad (4.3.11)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \mathbf{D}. \quad (4.3.12)$$

Weiterhin gilt definitionsgemäß für den Poyntingvektor:

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (4.3.13)$$

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (4.3.14)$$

Ordentliche Welle

Wir nehmen zunächst an, dass die elektrische Flussdichte der Welle senkrecht auf der Ebene steht, die von der optischen Achse und dem Wellenvektor aufgespannt wird. Eine

4 Polarisation

solche Welle wird ordentliche Welle genannt. Für das von uns gewählte Koordinatensystem besitzt die elektrische Flussdichte der ordentlichen Welle nur eine x -Komponente $\mathbf{D} = D_x \hat{\mathbf{e}}_x$. Mit den Gleichungen (4.3.5) und (4.3.8) folgt:

$$\mathbf{E} \parallel \mathbf{D}. \quad (4.3.15)$$

Damit gilt aber auch

$$\mathbf{S} \parallel \mathbf{k}, \quad (4.3.16)$$

$$|\mathbf{k}| = k_0 n_o. \quad (4.3.17)$$

Die ordentliche Welle verhält sich also genau so wie eine Welle in einem isotropen Medium.

Außerordentliche Welle

Jetzt betrachten wir eine sogenannte außerordentliche Welle, bei der der elektrische Flußdichtevektor in der durch die optische Achse und den Wellenvektor aufgespannten Ebene liegt. Für unser Koordinatensystem gilt also $\mathbf{D} = D_y \hat{\mathbf{e}}_y + D_z \hat{\mathbf{e}}_z$. Aus Gleichung (4.3.8) folgt für $D_y \neq 0$ und $D_z \neq 0$ unmittelbar

$$\mathbf{E} \not\parallel \mathbf{D}. \quad (4.3.18)$$

Wegen $\mathbf{S} \cdot \mathbf{E} = 0$ und $\mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0$ resultiert in dieser Situation:

$$\mathbf{S} \not\parallel \mathbf{k}! \quad (4.3.19)$$

Die Phasenfronten der außerordentlichen Welle breiten sich also in eine andere Richtung aus als der zugehörige Energiefluss (siehe Abbildung 4.7).

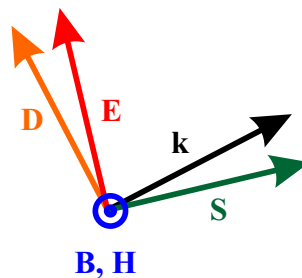


Abbildung 4.7: Relative Orientierung der Feldvektoren, des Wellenvektors und des Poyntingvektors für die außerordentliche Welle in einem anisotropen Medium.

Der Betrag des Wellenvektors der außerordentlichen Welle $|\mathbf{k}(\theta)| = n(\theta)k_0$ hängt vom Winkel θ ab, den der Wellenvektor \mathbf{k} mit der optischen Achse einschließt. Hierbei erfüllt der Brechungsindex $n(\theta)$ die folgende Bedingung (Beweis: siehe grauer Kasten):

$$\frac{1}{n^2(\theta)} = \frac{\cos^2(\theta)}{n_o^2} + \frac{\sin^2(\theta)}{n_e^2}. \quad (4.3.20)$$

Beweis von Gleichung (4.3.20)

Wir wollen nun die Winkelabhängigkeit des Brechungsindex $n(\theta)$ berechnen. Aus den Gleichungen (4.3.11) und (4.3.12) folgt zunächst

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = -\frac{\omega^2}{\epsilon_0 c_0^2} \mathbf{D}. \quad (4.3.21)$$

Wir formen diese Gleichung unter Verwendung von $|\mathbf{k}| = n(\theta) \frac{\omega}{c_0}$ nach \mathbf{D} um:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 n^2(\theta) \left(\mathbf{E} - \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})}{k^2} \right). \quad (4.3.22)$$

Im nächsten Schritt zerlegen wir die Vektoren jeweils in eine Komponente senkrecht und parallel zur optischen Achse:

$$\mathbf{k} = k_{\perp} \hat{\mathbf{e}}_{\perp} + k_{\parallel} \hat{\mathbf{e}}_{\parallel}, \quad (4.3.23)$$

$$\mathbf{D} = D_{\perp} \hat{\mathbf{e}}_{\perp} + D_{\parallel} \hat{\mathbf{e}}_{\parallel}, \quad (4.3.24)$$

$$\mathbf{E} = E_{\perp} \hat{\mathbf{e}}_{\perp} + E_{\parallel} \hat{\mathbf{e}}_{\parallel}. \quad (4.3.25)$$

Mit $D_{\perp} = \epsilon_0 n_o^2 E_{\perp}$ und $D_{\parallel} = \epsilon_0 n_e^2 E_{\parallel}$ folgt aus Gleichung (4.3.22):

$$k_{\perp} E_{\perp} = \frac{n^2(\theta) k_{\perp}^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})}{(n^2(\theta) - n_o^2) k^2}, \quad (4.3.26)$$

$$k_{\parallel} E_{\parallel} = \frac{n^2(\theta) k_{\parallel}^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})}{(n^2(\theta) - n_e^2) k^2}. \quad (4.3.27)$$

Durch Addition der beiden Anteile erhalten wir:

$$k_{\perp} E_{\perp} + k_{\parallel} E_{\parallel} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = \left(\frac{n^2(\theta) k_{\perp}^2}{(n^2(\theta) - n_o^2) k^2} + \frac{n^2(\theta) k_{\parallel}^2}{(n^2(\theta) - n_e^2) k^2} \right) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}). \quad (4.3.28)$$

Diese Gleichung lässt sich schreiben als

$$\frac{1}{n^2(\theta)} = \frac{k_{\perp}^2}{(n^2(\theta) - n_o^2) k^2} + \frac{k_{\parallel}^2}{(n^2(\theta) - n_e^2) k^2}. \quad (4.3.29)$$

Mit $k_{\perp}/k = \sin(\theta)$ und $k_{\parallel}/k = \cos(\theta)$ finden wir nach einer kurzen Rechnung unser Endergebnis:

$$\frac{1}{n^2(\theta)} = \frac{\cos^2(\theta)}{n_o^2} + \frac{\sin^2(\theta)}{n_e^2}. \quad (4.3.30)$$

Isofrequenzkurven

Die Endpunkte der Wellenvektoren \mathbf{k} aller außerordentlicher Wellen mit Frequenz ω liegen auf einer Kurve $\mathbf{k}(\omega)$. Laut Gleichung (4.3.20) ist diese sogenannte Isofrequenzkurve $\mathbf{k}(\omega)$ eine Ellipse. Im Fall der ordentlichen Welle ist dahingegen die Isofrequenz-Kurve $\mathbf{k}(\omega)$ ein Kreis (siehe Gleichung (4.3.17)). Eine genaue Analyse zeigt, dass der Poyntingvektor \mathbf{S} senkrecht auf der jeweiligen Isofrequenzkurve $\mathbf{k}(\omega)$ steht (Beweis: siehe grauer Kasten).

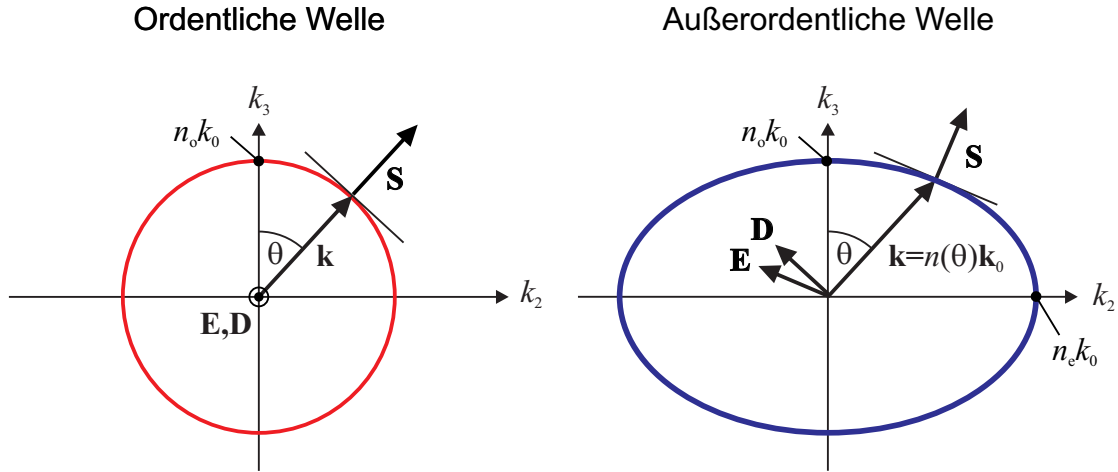


Abbildung 4.8: Ordentliche und außerordentliche Welle in einem anisotropen Medium. Der Wellenvektor \mathbf{k} schließt einen Winkel θ mit der optischen Achse ein. Der Poyntingvektor steht senkrecht auf der Isofrequenzkurve $\mathbf{k}(\omega)$.

Beweis der Bedingung $\mathbf{S} \cdot d\mathbf{k} = 0$

Wir zeigen jetzt, dass der Poyntingvektor \mathbf{S} senkrecht auf der jeweiligen Isofrequenzkurve $\mathbf{k}(\omega)$ steht. Nach den Gleichungen (4.3.11) und (4.3.12) gilt für eine Welle mit Frequenz ω und Wellenvektor \mathbf{k} :

$$\mathbf{H}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\mu_0 \omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{k}), \quad (4.3.31)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{H}(\mathbf{k}). \quad (4.3.32)$$

4 Polarisation

Für einen benachbarten Punkt $\mathbf{k} + d\mathbf{k}$ der Isofrequenzkurve (die Frequenz ω wird nicht geändert) gilt:

$$\mathbf{E}(\mathbf{k} + d\mathbf{k}) = \mathbf{E}(\mathbf{k}) + d\mathbf{E}, \quad (4.3.33)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{k} + d\mathbf{k}) = \mathbf{H}(\mathbf{k}) + d\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0\omega}(\mathbf{k} + d\mathbf{k}) \times \mathbf{E}(\mathbf{k} + d\mathbf{k}), \quad (4.3.34)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{k} + d\mathbf{k}) = \mathbf{D}(\mathbf{k}) + d\mathbf{D} = -\frac{1}{\omega}(\mathbf{k} + d\mathbf{k}) \times \mathbf{H}(\mathbf{k} + d\mathbf{k}). \quad (4.3.35)$$

Wenn wir die Terme proportional zu $d\mathbf{k} \times d\mathbf{E}$ und $d\mathbf{k} \times d\mathbf{H}$ vernachlässigen, können wir die Änderungen der Felder bei Variation des Wellenvektors $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k} + d\mathbf{k}$ angeben als:

$$d\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0\omega} (d\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{k}) + \mathbf{k} \times d\mathbf{E}), \quad (4.3.36)$$

$$d\mathbf{D} = -\frac{1}{\omega} (d\mathbf{k} \times \mathbf{H}(\mathbf{k}) + \mathbf{k} \times d\mathbf{H}). \quad (4.3.37)$$

Im nächsten Schritt multiplizieren wir die beiden letzten Gleichungen mit $\mathbf{H}(\mathbf{k})$ bzw. $\mathbf{E}(\mathbf{k})$:

$$\mathbf{H}(\mathbf{k}) \cdot d\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0\omega} \mathbf{H}(\mathbf{k}) \cdot (-\mathbf{E}(\mathbf{k}) \times d\mathbf{k} + \mathbf{k} \times d\mathbf{E}), \quad (4.3.38)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}) \cdot d\mathbf{D} = \frac{1}{\omega} \mathbf{E}(\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{H}(\mathbf{k}) \times d\mathbf{k} - \mathbf{k} \times d\mathbf{H}). \quad (4.3.39)$$

Mit Hilfe der Vektoridentität $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ können wir diese Gleichungen umschreiben zu

$$\mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{k}) \cdot d\mathbf{H} = \frac{1}{\omega} (\mathbf{E}(\mathbf{k}) \times \mathbf{H}(\mathbf{k})) \cdot d\mathbf{k} + \mathbf{D} \cdot d\mathbf{E}, \quad (4.3.40)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}) \cdot d\mathbf{D} = \frac{1}{\omega} (\mathbf{E}(\mathbf{k}) \times \mathbf{H}(\mathbf{k})) \cdot d\mathbf{k} + \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{k}) \cdot d\mathbf{H}. \quad (4.3.41)$$

Unter Beachtung von $\mathbf{D} \cdot d\mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D}$ folgt damit

$$(\mathbf{E}(\mathbf{k}) \times \mathbf{H}(\mathbf{k})) \cdot d\mathbf{k} = \mathbf{S} \cdot d\mathbf{k} = 0. \quad (4.3.42)$$

Da $d\mathbf{k}$ tangential zur Isofrequenzkurve orientiert ist, steht der Poyntingvektor \mathbf{S} wie behauptet senkrecht auf der jeweiligen Isofrequenzkurve $\mathbf{k}(\omega)$.

4.3.2 Doppelbrechung

Wir wollen nun die Ergebnisse der letzten Abschnitte nutzen um den Effekt der Doppelbrechung zu erklären. Wir erinnern uns zunächst dass die Ausbreitungsrichtung einer elektromagnetischen Welle durch den Energiefluss, also den Poyntingvektor, bestimmt wird. Zeigen die Wellenvektoren von ordentlicher und außerordentlicher Welle in die selbe Richtung, so werden die zugehörigen Poyntingvektoren im Allgemeinen nicht parallel zueinander sein. Die beiden Wellen breiten sich damit in unterschiedliche Richtungen aus.

Im Folgenden untersuchen wir den Übergang einer ebenen Welle von einem isotropen Medium in einen uniaxialen Kristall. Wir beschränken uns hierbei auf senkrechten Lichteinfall. In diesem Fall ist die Normalkomponente von \mathbf{D} in beiden Medien identisch Null (Stetigkeitsbedingung). Aus $\mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0$ folgt, dass der Wellenvektor unabhängig von der Polarisation parallel zur Flächennormalen steht. Für die ordentliche Welle gilt:

$$\mathbf{k}_o = k_o n_o \hat{\mathbf{e}}_n. \quad (4.3.43)$$

Entsprechend erhalten wir für die außerordentliche:

$$\mathbf{k}_e = k_o n(\theta) \hat{\mathbf{e}}_n. \quad (4.3.44)$$

Hierbei ist θ der Winkel zwischen der optischen Achse und der Flächennormalen.

Nach der obigen Überlegungen ist der Poyntingvektor (und damit die Ausbreitungsrichtung) der außerordentlichen Welle im Allgemeinen nicht parallel zum Wellenvektor. Ein unpolarisierter Lichtstrahl² spaltet deshalb in zwei zueinander orthogonal linear polarisierte Teilstrahlen auf. Der ordentliche Strahl (\mathbf{E} senkrecht zur optischen Achse) breitet sich senkrecht zur Grenzfläche aus während der außerordentliche Strahl (\mathbf{E} besitzt eine Komponente parallel zur optischen Achse) schräg durch den Kristall läuft.

4.3.3 Doppelbrechende Polarisatoren

Der Effekt der Doppelbrechung kann genutzt werden, um Polarisatoren für linear polarisiertes Licht zu realisieren. Der Glan-Thompson-Polarisator ist hierbei eine in der Praxis häufig genutzte Bauform. Er besteht aus einem Kalkspatkristall ($n_o = 1.66, n_e = 1.49$) der schräg zur optischen Achse gespalten wird. Die beiden Teilstücke werden mit einem durchsichtigen Kleber (z.B. Kanadabalsam, $n_k = 1.54$) wieder zusammengefügt. Die Ein- und Austrittsfläche sind beim Glan-Thompson-Polarisator parallel zur optischen Achse orientiert.

Für senkrechten Lichteinfall breiten sich ordentliche und außerordentliche Welle in Richtung der Flächennormalen aus. Der Kristall ist so geschnitten, dass der Einfallswinkel auf die Spaltfläche größer ist als der Grenzwinkel der ordentlichen Welle $\alpha_{g,0} = \sin^{-1}(n_k/n_o)$

²Wir denken uns einen Lichtstrahl als Teil einer ebenen Welle, dessen Querschnitt groß ist im Vergleich zur Wellenlänge.

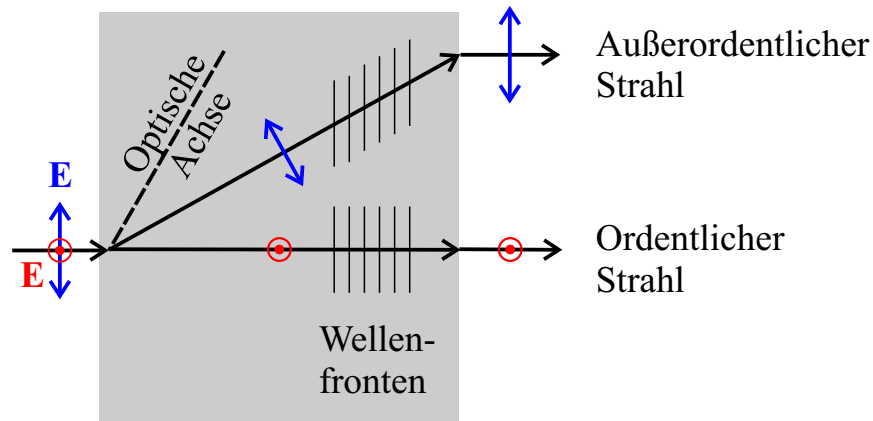


Abbildung 4.9: Doppelbrechung eines unpolarisierten Lichtstrahls für senkrechten Einfall.

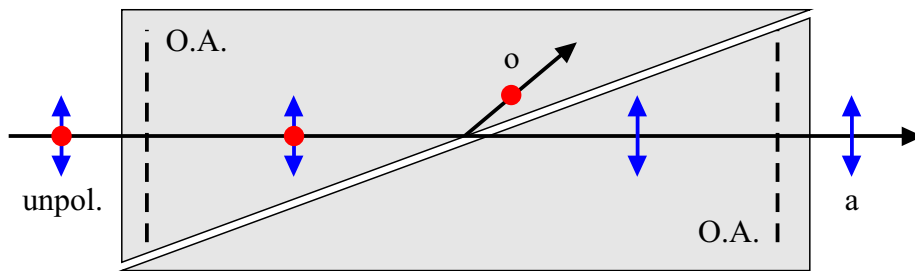


Abbildung 4.10: Glan-Thompson-Polarisator zur Erzeugung von linear polarisiertem Licht.

aber kleiner als der Grenzwinkel der außerordentlichen Welle $\alpha_{g,e} = \sin^{-1}(n_k/n_e)$. Damit wird die ordentliche Welle total reflektiert und nur die außerordentliche Welle kann in das zweite Kalkspat-Stück übertreten. Die transmittierte Welle ist somit entlang der optischen Achse polarisiert.

4.3.4 Verzögerungsplatten

Eine Verzögerungsplatte ist ein optisches Element, das den Polarisationszustand einer transmittierten elektromagnetischen Welle modifiziert. Verzögerungsplatten werden häufig aus uniaxialen Kristallen (z.B. Kalkspat) gefertigt.

Experiment: Doppelbrechung im Plexiglas-Stab.

4 Polarisation

Wir betrachten nun eine planparallele Platte der Dicke d eines doppelbrechenden Materials, dessen optische Achse parallel zu den Grenzflächen orientiert ist. Eine linear polarisierte ebene Welle treffe senkrecht auf die Platte:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_o \hat{\mathbf{e}}_o e^{i(\mathbf{k}_o \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + E_e \hat{\mathbf{e}}_e e^{i(\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (4.3.45)$$

Aufgrund der verschiedenen Brechungsindizes für die ordentliche und die außerordentliche Welle haben die beiden Komponenten am Ende der Platte unterschiedliche optische Weglängen zurückgelegt. Dies führt zu einer relativen Phasenverschiebung

$$\Delta\varphi = k_o d - k_e d = \frac{2\pi}{\lambda_0} d (n_o - n_e). \quad (4.3.46)$$

Durch die Wahl der Dicke d können unterschiedliche Phasenverschiebungen realisiert werden. In der Praxis spielen vor allem $\lambda/4$ -Platten und $\lambda/2$ -Platten eine große Rolle.

Experiment: $\lambda/4$ -Platte und $\lambda/2$ -Platte.

$\lambda/4$ -Platte

Die Dicke der Platte sei so gewählt, dass eine Phasenverschiebung $\Delta\varphi = \pi/2$ entsteht. Dies wird gerade für $d(n_o - n_e) = \lambda_0/4$ erreicht. Ist die Polarisationsrichtung der einfallenden Welle um 45° gegenüber der optischen Achse gedreht ($E_o = E_e$), so ist die Welle aufgrund der Phasenverzögerung $\Delta\varphi = \pi/2$ zwischen den beiden Komponenten hinter der Verzögerungsplatte zirkular polarisiert (Vergleiche mit Abschnitt 4.1.2).

$\lambda/2$ -Platte

Wir betrachten nun eine Platte mit $d(n_o - n_e) = \lambda_0/2$. Hierdurch entsteht eine Phasenverschiebung $\Delta\varphi = \pi$ zwischen den beiden Polarisationskomponenten. Die Polarisationsrichtung der einfallenden ebenen Welle schlieÙe mit der optischen Achse den Winkel α ein:

$$E_e = E_0 \cos(\alpha) \quad (4.3.47)$$

$$E_o = E_0 \sin(\alpha) \quad (4.3.48)$$

Aufgrund der Phasenverzögerung von $\Delta\varphi = \pi$ zwischen den beiden Komponenten erhalten wir hinter der $\lambda/2$ -Platte:

$$E_e = E_0 \cos(\alpha) e^{ik_e d} \quad (4.3.49)$$

$$E_o = E_0 \sin(\alpha) e^{ik_o d} = -E_0 \sin(\alpha) e^{ik_e d} \quad (4.3.50)$$

Die Welle ist hinter der $\lambda/2$ -Platte also immer noch linear polarisiert. Allerdings wird die Polarisationsrichtung um den Winkel 2α gedreht.

4 Polarisation

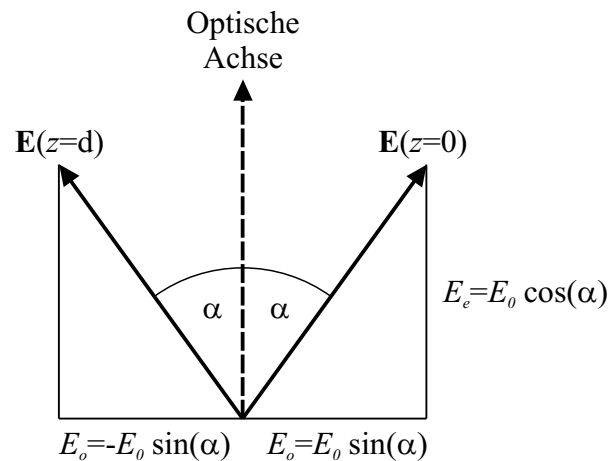


Abbildung 4.11: Drehung der Polarisationsrichtung durch eine $\lambda/2$ -Platte.

4.3.5 Spannungsdoppelbrechung

Experiment: Spannungsdoppelbrechung.

Optisch isotrope Medien (z.B. Gläser oder Polymere) können durch mechanischen Druck oder Zug doppelbrechend werden. Dies kann anhand eines einfachen Experiments gezeigt werden. Das Medium wird hierzu zwischen zwei gekreuzte Polarisatoren gestellt und mit einer Weißlichtlampe beleuchtet. Wirken keine Druck- oder Zugkräfte auf das Medium, so verändert das isotrope Medium den Polarisationszustand der elektromagnetischen Welle nicht. Die transmittierte Lichtwelle wird damit durch den Analysator ausgelöscht. Durch das Einwirken einer mechanischen Kraft wird eine Doppelbrechung im Medium induziert. Das Medium wirkt damit als Verzögerungsplatte und die elektromagnetische Welle wird im Allgemeinen hinter dem Medium elliptisch polarisiert sein. Damit erhalten wir eine von Null verschiedene Transmission durch den Analysator.

4.3.6 Anwendungsbeispiel: Flüssigkristall Modulatoren

Flüssigkristalle bestehen aus gestreckten Molekülen, die in der flüssigen Phase eine Orientierungsordnung aufweisen. Sie treten in verschiedenen Phasen auf:

- Nematische Phase: Die Moleküle sind parallel orientiert aber zufällig angeordnet.
- Smektische Phase: Die Moleküle sind in Schichten angeordnet, in denen sie eine ein- oder zweidimensional periodische Struktur ausbilden.
- Cholesterische Phase: Die Moleküle sind in Schichten parallel angeordnet. Die einzelnen Schichten sind helixförmig verdreht.

4 Polarisation

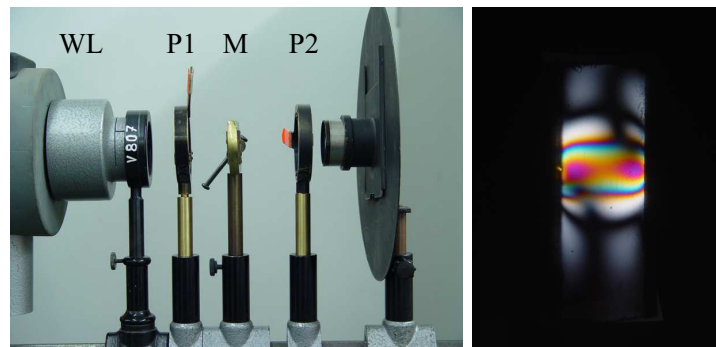


Abbildung 4.12: Experiment zur Demonstration der Spannungsdoppelbrechung. Links: Experimenteller Aufbau. WL: Weißlichtlampe, P1: Polarisator, M: eingespannte Glasplatte, P2: Analysator. Rechts: Intensität hinter dem Analysator. Fotos: Michael Kortmann.

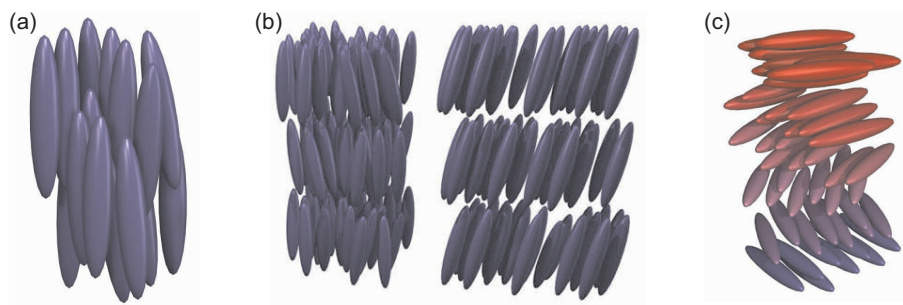


Abbildung 4.13: Flüssigkristalline Phasen: (a) Nematische Phase. (b) Smektische Phase. (c) Cholesterische Phase. (Quelle: Wikipedia).

Die nematische Phase verhält sich optisch wie ein uniaxialer Kristall, dessen optische Achse parallel zur Vorzugsrichtung der Moleküle orientiert ist. Diese Eigenschaft ist für die Verwendung in Modulatoren von großem technischen Interesse. Man nutzt hierbei aus, dass die Flüssigkristall-Moleküle aufgrund ihrer anisotropen dielektrischen Eigenschaften durch ein äußeres elektrisches Feld ausgerichtet werden können. Typischerweise orientieren sich die Moleküle mit ihrer langen Achse parallel zum Feld. Eine nematische Drehzelle besteht aus zwei Glasplatten, die mit einer transparenten Elektrode aus Indium-Zinn-Oxid (ITO) und einem dünnen Polymid-Film beschichtet sind. Zwischen den Glasplatten befindet sich ein nematischer Flüssigkristall. Durch Bürsten wird die Polymidschicht mit Rillen versehen. Die Flüssigkristall-Moleküle richten sich ohne angelegte Spannung parallel zu den Rillen aus. Werden die Vorzugsrichtungen der beiden Substrate um 90° zueinander verdreht, so ergibt sich eine kontinuierliche Drehung der Vorzugsrichtung der Flüssigkristall-Moleküle um 90° entlang der Zelle. Die Polarisation einer linear polarisierten optischen Welle folgt der Vorzugsrichtung der Flüssigkristall-Moleküle, so dass die spannungslose nematische Drehzelle die lineare Polarisation einer optischen Welle um 90° dreht. Durch das Anlegen einer Spannung werden die Flüssigkristall-Moleküle entlang der

4 Polarisation

Zelle ausgerichtet und die ursprüngliche Polarisation der optischen Welle bleibt erhalten. Die Anordnung einer nematischen Drehzelle zwischen zwei gekreuzten Polarisatoren bildet das Grundelement einer Flüssigkristall-Anzeige.

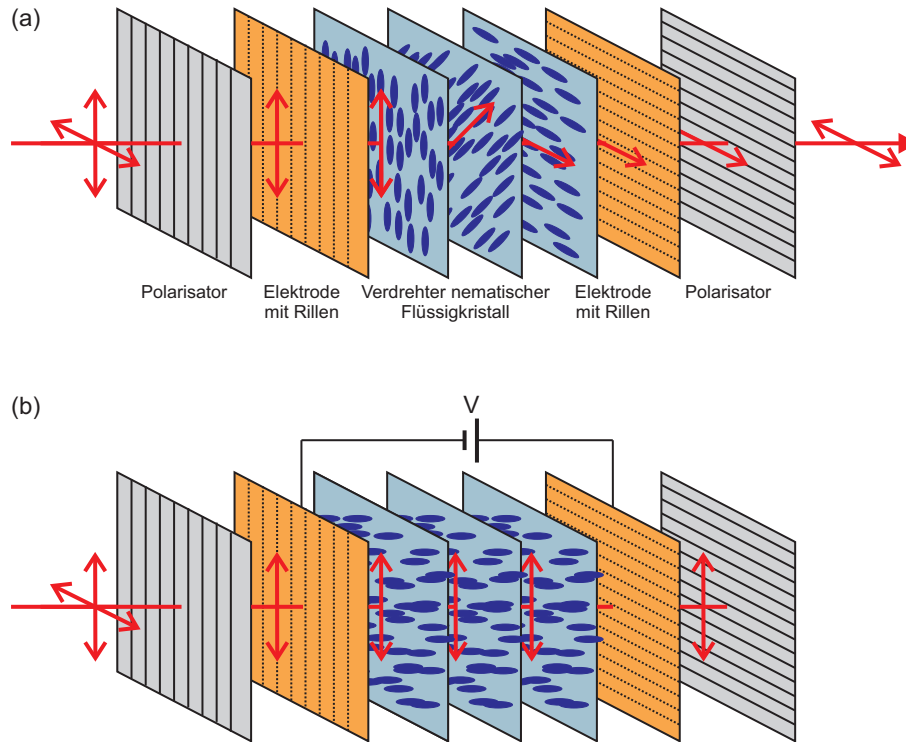


Abbildung 4.14: Nematische Drehzelle: (a) Ohne angelegte Spannung wird die lineare Polarisation einer optischen Welle um 90° gedreht. (b) Durch das Anlegen einer Spannung werden die Flüssigkristall-Moleküle ausgerichtet und die ursprüngliche Polarisation der optischen Welle bleibt erhalten.

4.4 Optische Aktivität

Experiment: Optische Aktivität einer Zuckerlösung.

Optische Aktivität bezeichnet die Eigenschaft bestimmter Materialien, die Polarisationsrichtung einer linear polarisierten Welle beim Durchgang durch das Medium zu drehen. Der Drehwinkel ist hierbei unabhängig von der Polarisationsrichtung der einfallenden Welle. Weiterhin beobachtet man, dass die Drehrichtung beim Blick in Richtung der Lichtquelle unabhängig von der Propagationsrichtung der Welle ist (siehe Abbildung 4.15). Für ein optisch aktives Medium der Dicke d gilt:

$$\alpha = \alpha_s d. \quad (4.4.1)$$

Hierbei ist α der Drehwinkel der Polarisationsrichtung nach der Strecke d und α_s das spezifische optische Drehvermögen. Wird die Polarisationsrichtung beim Blick in Rich-

4 Polarisation

ung der Lichtquelle im Uhrzeigersinn gedreht, so spricht man von einer rechtsdrehenden Substanz mit $\alpha > 0$. Bei Drehung der Polarisationsrichtung im Gegenuhrzeigersinn nennt man die Substanz linksdrehend mit $\alpha < 0$.

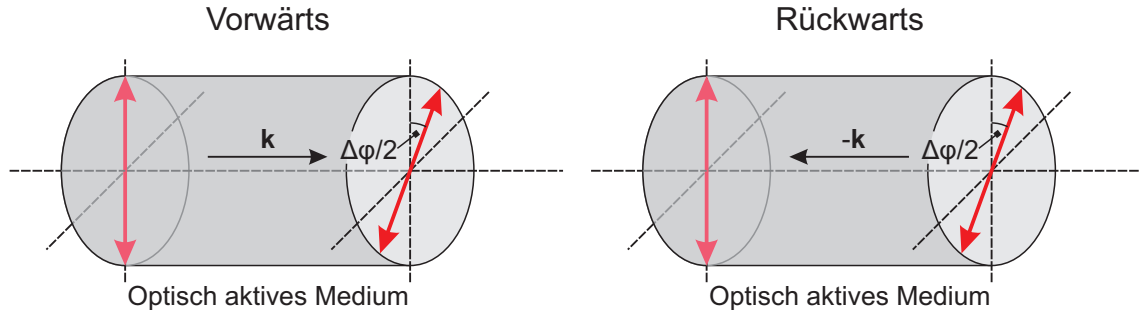


Abbildung 4.15: Drehung der Polarisationsrichtung einer linear polarisierten Welle durch ein optisch aktives Medium.

Optische Aktivität tritt nur in chiralen („händigen“) Medien auf. Die molekularen Bausteine eines chiralen Mediums können weder durch Rotation noch durch Translation mit ihrem Spiegelbild in Deckung gebracht werden³. Die Materialgleichungen eines optisch aktiven Mediums können in der folgenden Form angegeben werden:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon(\omega)\epsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) - i\frac{\kappa(\omega)}{c_0}\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega), \quad (4.4.2)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = i\frac{\kappa(\omega)}{c_0}\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + \mu(\omega)\mu_0\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) \quad . \quad (4.4.3)$$

Der Chiralitäts-Parameter $\kappa(\omega)$ ist ein Maß für die optische Aktivität eines Mediums.

Die Polarisations-Eigenzustände eines optisch aktiven Mediums sind links- und rechtszirkular polarisierte Wellen (Beweis: Übung). Die Brechungsindizes der links- und rechtszirkular polarisierten Wellen berechnen sich zu:

$$n_L = \sqrt{\epsilon\mu} - \kappa, \quad (4.4.4)$$

$$n_R = \sqrt{\epsilon\mu} + \kappa, \quad (4.4.5)$$

Wir betrachten nun eine linear polarisierte Welle, die in ein optisch aktives Medium eingestrahlt wird. Diese Welle können wir als Überlagerung einer links- und einer rechtszirkular polarisierten Welle angeben:

$$\mathbf{E} = E_0\hat{\mathbf{e}}_x e^{i(kz - \omega t)} = E_L + E_R, \quad (4.4.6)$$

³Schrauben mit Links- und Rechtsgewinde sind Beispiele für chirale Objekte

mit

$$E_L = \frac{E_0}{2} (\hat{\mathbf{e}}_x + i\hat{\mathbf{e}}_y) e^{i(kz-\omega t)}, \quad (4.4.7)$$

$$E_R = \frac{E_0}{2} (\hat{\mathbf{e}}_x - i\hat{\mathbf{e}}_y) e^{i(kz-\omega t)}. \quad (4.4.8)$$

Nach der Propagationsstrecke d im optisch aktiven Medium ist die Welle gegeben durch:

$$E = E_L e^{i\varphi_L} + E_R e^{i\varphi_R} \quad (4.4.9)$$

mit

$$\varphi_L = \frac{2\pi}{\lambda_0} d n_L, \quad (4.4.10)$$

$$\varphi_R = \frac{2\pi}{\lambda_0} d n_R. \quad (4.4.11)$$

Durch Umformen erhalten wir

$$E = E_0 e^{i\left(\frac{\varphi_L + \varphi_R}{2}\right)} \left[\cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \hat{\mathbf{e}}_x - \sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \hat{\mathbf{e}}_y \right] e^{i(kz-\omega t)}. \quad (4.4.12)$$

Hierbei ist die Phasendifferenz gegeben durch

$$\Delta\varphi = \varphi_L - \varphi_R = \frac{2\pi}{\lambda_0} d (n_L - n_R). \quad (4.4.13)$$

Gleichung (4.4.12) zeigt, dass die Welle nach der Strecke d immer noch linear polarisiert ist. Allerdings ist die Polarisationsrichtung um den Winkel $\frac{\Delta\varphi}{2}$ gedreht. Der Vergleich mit Gleichung (4.4.1) ergibt:

$$\alpha_s = \frac{\pi}{\lambda_0} (n_L - n_R). \quad (4.4.14)$$

4.5 Faraday Effekt

Viele Materialien besitzen die Fähigkeit die Polarisationsrichtung einer linear polarisierten Welle zu drehen, wenn man ein statisches Magnetfeld \mathbb{B} in Propagationsrichtung der Welle anlegt. Dieses Phänomen bezeichnet man als Faraday Effekt. Das Drehvermögen eines Faraday-Mediums kann wie folgt angegeben werden:

$$\rho = V |\mathbb{B}|. \quad (4.5.1)$$

Hierbei ist V die sogenannte Verdet-Konstante des Materials. Beim Faraday Effekt wechselt die Drehrichtung, wenn sich die Orientierung des statischen Magnetfelds relativ zur Ausbreitungsrichtung der optischen Welle umkehrt (siehe Abbildung. 4.16). Wird also eine Welle nach dem ersten Durchgang durch das Faraday Medium an einem Spiegel reflektiert und durchläuft dieses ein zweites Mal, so wird die Rotation der Polarisationsrichtung doppelt so groß sein wie beim einmaligen Durchlaufen des Mediums.

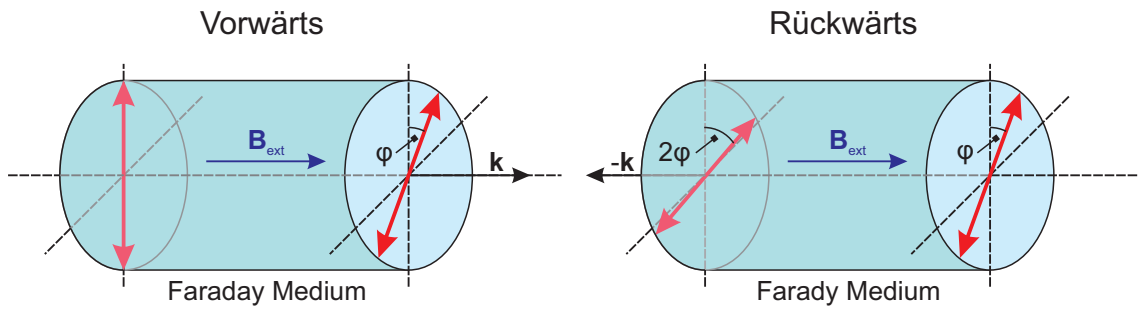


Abbildung 4.16: Drehung der Polarisationsrichtung einer linear polarisierten Welle beim Durchgang durch ein Faraday-Medium.

4.6 Jones Formalismus

Die Polarisations-eigenschaften eines optischen Bauteils können mit Hilfe des sogenannten Jones-Formalismus beschrieben werden. Dieser ermöglicht die effiziente Berechnung des Polarisationszustands einer beliebigen ebenen Wellen nach der Transmission durch das optische Element. Ebenso lassen sich Verkettungen mehrerer optischer Bauteile einfach handhaben.

Gegeben sei eine ebene Welle:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (A_x \hat{\mathbf{e}}_x + A_y \hat{\mathbf{e}}_y) e^{i(kz - \omega t)} \quad (4.6.1)$$

$$= (a_x e^{i\varphi_x} \hat{\mathbf{e}}_x + a_y e^{i\varphi_y} \hat{\mathbf{e}}_y) e^{i(kz - \omega t)}. \quad (4.6.2)$$

Wir definieren nun den zugehörigen Jones-Vektor als:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix} \quad (4.6.3)$$

mit $A = \sqrt{|A_x|^2 + |A_y|^2}$.

Beispiele:

- Linear polarisierte Welle (x -Polarisation):

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.6.4)$$

- Linear polarisierte Welle (y -Polarisation):

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.6.5)$$

- Rechts-zirkular polarisierte Welle:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \quad (4.6.6)$$

- Links-zirkular polarisierte Welle:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad (4.6.7)$$

Zwei Wellen mit Jones-Vektoren \mathbf{J}_1 und \mathbf{J}_2 sind zueinander orthogonal polarisiert, wenn das innere Produkt zwischen \mathbf{J}_1 und \mathbf{J}_2 verschwindet:

$$(\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2) = A_{1x}A_{2x}^* + A_{1y}A_{2y}^*. \quad (4.6.8)$$

Ein beliebiger Jones-Vector \mathbf{J} kann immer als Überlagerung zweier orthogonaler Jones-Vektoren geschrieben werden:

$$\mathbf{J} = \alpha_1 \mathbf{J}_1 + \alpha_2 \mathbf{J}_2 \quad (4.6.9)$$

mit

$$\alpha_1 = (\mathbf{J}, \mathbf{J}_1), \quad \alpha_2 = (\mathbf{J}, \mathbf{J}_2). \quad (4.6.10)$$

Wir betrachten eine ebene Welle mit Jones-Vektor \mathbf{J}_i . Nach der Propagation durch ein optisches Element ändert sich der Polarisationszustand der ebenen Welle zu: $\mathbf{J}_i \rightarrow \mathbf{J}_t$. Die Jones-Vektoren der ebenen Welle vor und nach dem optischen Element sind durch eine 2×2 -Matrix, die sogenannte Jones-Matrix \mathbf{T} , miteinander verknüpft:

$$\mathbf{J}_t = \mathbf{T} \mathbf{J}_i \quad (4.6.11)$$

mit

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} \\ T_{yx} & T_{yy} \end{pmatrix} \quad (4.6.12)$$

Durchläuft eine ebene Welle mehrere optische Elemente, so ergibt sich die Jones-Matrix des Gesamtsystems aus dem Produkt der einzelnen Jones-Matrizen:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_n \cdots \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1. \quad (4.6.13)$$

Hierbei ist \mathbf{T}_1 die Jones-Matrix des optischen Elements, das von der Welle zuerst durchlaufen wird.

Jones-Matrizen einiger optischer Bauteile:

- Linearpolarisator mit Durchlassrichtung in x -Richtung:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.6.14)$$

- Linearpolarisator mit Durchlassrichtung in y -Richtung:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.6.15)$$

- Verzögerungsplatte mit optischer Achse in x -Richtung:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\Delta\varphi} \end{pmatrix} \quad (4.6.16)$$

mit $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}d(n_o - n_e)$.

- Polarisationsdreher (Optisch aktives Medium oder Faraday-Medium; dreht die Polarisation einer linear polarisierten Welle um den Winkel θ):

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (4.6.17)$$

Die Elemente eines Jones-Vektors hängen von der Wahl des Koordinatensystems ab. Mit Hilfe einer Drehmatrix $\mathbf{R}(\alpha)$ können wir den Jones-Vektor in einem um den Winkel α gedrehten Koordinatensystem angeben:

$$\mathbf{J}' = \mathbf{R}(\alpha)\mathbf{J} \quad (4.6.18)$$

mit

$$\mathbf{R}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}. \quad (4.6.19)$$

Um die Jones-Matrix \mathbf{T}' eines optischen Elements im neuen Koordinatensystem anzugeben, können wir das folgende Transformationsgesetz verwenden (Beweis: Übung):

$$\mathbf{T}' = \mathbf{R}(\alpha)\mathbf{T}\mathbf{R}(-\alpha). \quad (4.6.20)$$

Umgekehrt können wir die Jones-Matrix \mathbf{T} im ursprünglichen Koordinatensystem schreiben als:

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}(-\alpha)\mathbf{T}'\mathbf{R}(\alpha). \quad (4.6.21)$$

Beispiel 1: Linear Polarisator, dessen Durchlassrichtung mit der x -Achse den Winkel α einschließt.

Wir begeben uns zunächst in ein Koordinatensystem, das um den Winkel α gegenüber dem ursprünglichen Koordinatensystem gedreht ist. In diesem neuen Koordinatensystem ist die Jones-Matrix \mathbf{T}' des Polarisators durch Gleichung (4.6.14) gegeben. Durch Verwendung von Gleichung (4.6.21) können wir die Jones Matrix \mathbf{T} im ursprünglichen Koordinatensystem angeben:

$$\begin{aligned}\mathbf{T} = \mathbf{R}(-\alpha) \mathbf{T}' \mathbf{R}(\alpha) &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) & \cos(\alpha) \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \sin(\alpha) & \sin^2(\alpha) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.6.22)$$

Beispiel 2: Wellenplatte, deren optische Achse um den Winkel α gegenüber der x -Achse gedreht ist.

Wir betrachten zunächst die Wellenplatte im rotierten Koordinatensystem. In diesem hat die Jones-Matrix die in Gleichung (4.6.16) angegebene einfache Form. Durch Rücktransformation in das ursprüngliche Koordinatensystem erhalten wir:

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \mathbf{R}(-\alpha) \mathbf{T}' \mathbf{R}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\Delta\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)e^{i\Delta\varphi} & \cos(\alpha) \sin(\alpha) [1 - e^{i\Delta\varphi}] \\ \cos(\alpha) \sin(\alpha) [1 - e^{i\Delta\varphi}] & \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)e^{i\Delta\varphi} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.6.23)$$

5 Wellenüberlagerung und Interferenz

Im Rahmen der linearen Optik ist die Wellengleichung eine lineare Gleichung und es gilt das Superpositionsprinzip, d.h., die elektrische Feldstärke an einem Ort zu einem Zeitpunkt ist durch die algebraische Summe der elektrischen Feldstärken aller Teilwellen gegeben. Wir wollen uns im folgenden der Frage widmen, welche beobachtbaren Phänomene sich aus dem Superpositionsprinzip ergeben.

5.1 Zweistrahlinterferenz

Experiment: Fresnelscher Doppelspiegel mit Laser.

Wir betrachten zwei monochromatische, ebene Wellen $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t)$ mit derselben Kreisfrequenz ω :

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{0,1} e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (5.1.1)$$

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{0,2} e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (5.1.2)$$

Werden die beiden Wellen in einem Raumgebiet überlagert, so ist nach dem Superpositionsprinzip das resultierende elektrische Feld durch die Summe der beiden Felder gegeben:

$$\mathbf{E}_{ges}(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{E}_{0,1} e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} + \mathbf{E}_{0,2} e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}}) e^{-i\omega t}. \quad (5.1.3)$$

Der zeitliche Mittelwert der Intensität der resultierenden Welle ergibt sich nach Abschnitt 2.2.5 zu:

$$I(\mathbf{r}) = \frac{c\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}_{ges}(\mathbf{r}, t)|^2 \quad (5.1.4)$$

$$= \frac{c\epsilon_0}{2} \left[|\mathbf{E}_{0,1}|^2 + |\mathbf{E}_{0,2}|^2 + \mathbf{E}_{0,1} \cdot \mathbf{E}_{0,2}^* e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}} + \mathbf{E}_{0,1}^* \cdot \mathbf{E}_{0,2} e^{-i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}} \right] \quad (5.1.5)$$

$$= \frac{c\epsilon_0}{2} \left[|\mathbf{E}_{0,1}|^2 + |\mathbf{E}_{0,2}|^2 + 2\Re \left(\mathbf{E}_{0,1} \cdot \mathbf{E}_{0,2}^* e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}} \right) \right]. \quad (5.1.6)$$

Für zwei linear polarisierte Wellen mit Polarisationsrichtungen $\hat{\mathbf{e}}_1$ und $\hat{\mathbf{e}}_2$ folgt:

$$I(\mathbf{r}) = \frac{c\epsilon_0}{2} E_{0,1}^2 + \frac{c\epsilon_0}{2} E_{0,2}^2 + c\epsilon_0 E_{0,1} E_{0,2} \cos((\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}) \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2. \quad (5.1.7)$$

5 Wellenüberlagerung und Interferenz

Die Intensität der resultierenden Welle ist also nicht einfach die Summe der Intensitäten der beiden Wellen sondern wird durch den sogenannten Interferenzterm (dritter Term in Gleichung (5.1.7)) modifiziert. Abhängig von der relativen Phase kann die Gesamtintensität deshalb bei konstruktiver Interferenz größer oder bei destruktiver Interferenz kleiner als die Summe der Einzelintensitäten sein. Der Interferenzterm verschwindet, falls die beiden Wellen orthogonal polarisiert sind, d.h., $(\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2) = 0$.

Wir betrachten als instruktives Beispiel die Überlagerung zweier linear polarisierter ebener Wellen gleicher Amplitude und identischer Polarisationsrichtung ($\hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{e}}_2$):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (5.1.8)$$

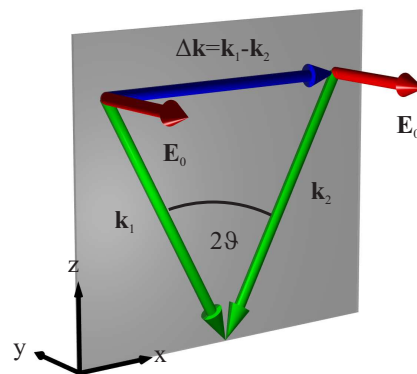


Abbildung 5.1: Überlagerung von zwei linear polarisierten ebenen Wellen.

Für die Intensität finden wir mit Gleichung (5.1.7):

$$I(\mathbf{r}) = 2I_0 [1 + \cos(\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \quad (5.1.9)$$

mit

$$\Delta\mathbf{k} = (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2). \quad (5.1.10)$$

Abbildung 5.1 entnehmen wir, dass

$$|\Delta\mathbf{k}| = \frac{4\pi \sin(\theta)}{\lambda}. \quad (5.1.11)$$

In Richtung von $\Delta\mathbf{k}$ ist die Intensität periodisch moduliert. Es bilden sich Streifen niedriger und hoher Intensität aus, sogenannte Interferenzstreifen. Für den räumlichen Abstand a zweier Interferenzmaxima gilt:

$$a = \frac{\lambda}{2|\sin(\theta)|}. \quad (5.1.12)$$

5 Wellenüberlagerung und Interferenz

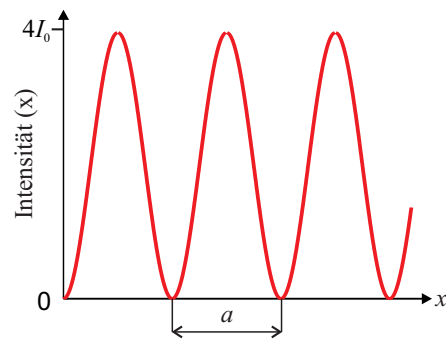
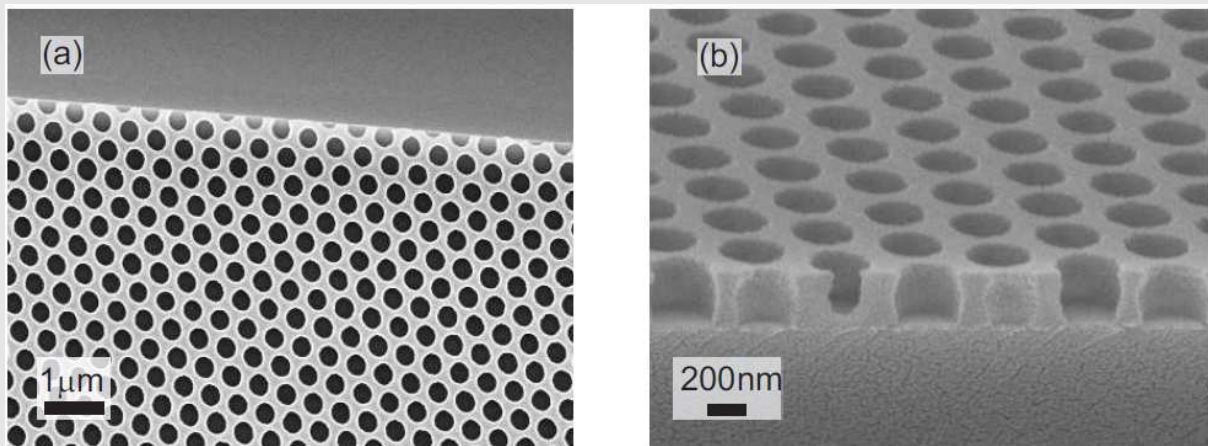


Abbildung 5.2: Räumliche Modulation der Intensität bei der Überlagerung zweier ebener Wellen.

Anwendungsbeispiel: Interferenzlithographie

Die Interferenzlithographie erlaubt die Herstellung von großflächigen periodischen Photolackstrukturen. Hierzu wird ein Laserstrahl in mehrere Teilstrahlen aufgeteilt. Die Überlagerung der Teilstrahlen führt zu einem Interferenzmuster, mit dem ein Photolack belichtet wird. Eine 1D-periodische Struktur entsteht durch die Interferenz von zwei Strahlen. Die Überlagerung von drei und vier Strahlen kann zur Herstellung von periodischen 2D- und 3D-Strukturen genutzt werden.



Die obigen elektronenmikroskopischen Aufnahmen zeigen eine periodische 2D-Photolackstruktur, die mit einer Überlagerung von drei ebenen Wellen belichtet wurde. Quelle: Diplomarbeit Nils Feth.

5.2 Interferometer

Interferometer sind optische Systeme, in denen Lichtwellen so überlagert werden, dass Interferenzeffekte auftreten. Historisch spielten Interferometer bei der Untersuchung der Welleneigenschaften von Licht eine große Rolle. Heute werden sie in der Physik, der Astronomie und der Messtechnik als hochpräzise Messinstrumente eingesetzt.

Interferometer werden in zwei Kategorien eingeteilt:

- Amplitudenaufspaltende Interferometer (z.B. Michelson-Interferometer)
- Wellenfrontaufspaltende Interferometer (z.B. Youngscher Doppelspalt).

5.2.1 Michelson Interferometer

Experiment: Michelson Interferometer mit Laser.

Im Michelson-Interferometer wird eine einlaufende Welle mit einem Strahlteiler in zwei Teilwellen aufgespalten. Nach der Weglänge L (Teilwelle 1) beziehungsweise $L + \Delta L$ (Teilwelle 2) werden die beiden Teilwellen an Spiegeln jeweils in sich zurückreflektiert. Der Strahlteiler überlagert die zurücklaufenden Wellen wieder und die Intensität der Gesamtwelle wird am Ausgang des Interferometers gemessen.

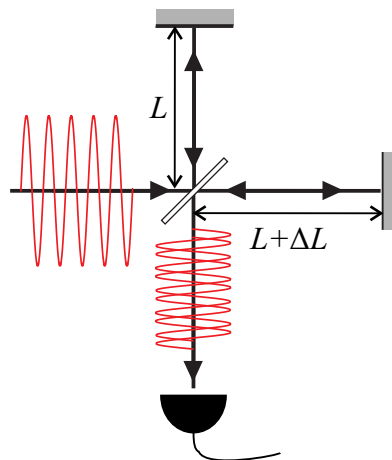


Abbildung 5.3: Michelsoninterferometer.

Die Weglängendifferenz $2\Delta L$ entspricht einer Verzögerung $\tau = 2\Delta L/c$ zwischen den beiden Teilwellen. Für die Gesamtwelle gilt somit:

$$E(r, t) = E_0(r, t) + E_0(r, t + \tau). \quad (5.2.1)$$

Im Folgenden betrachten wir eine monochromatische, linear polarisierte Welle:

$$E_0(r, t) = E_0 e^{i(kr - \omega t)}. \quad (5.2.2)$$

5 Wellenüberlagerung und Interferenz

Die Intensität der Gesamtwelle als Funktion der Verzögerung τ wird Interferogramm genannt. Am Ausgang des Interferometers finden wir:

$$\begin{aligned} I(\tau) &= \frac{1}{2}c\epsilon_0\epsilon |E(t)|^2 = \frac{1}{2}c\epsilon_0\epsilon [E_0(t) + E_0(t + \tau)] [E_0^*(t) + E_0^*(t + \tau)] \\ &= \frac{1}{2}c\epsilon_0\epsilon (|E_0(t)|^2 + |E_0(t + \tau)|^2 + E_0(t)E_0^*(t + \tau) + E_0^*(t)E_0(t + \tau)) \\ &= 2I_0 + I_0 e^{i\omega\tau} + I_0 e^{-i\omega\tau} \\ &= 2I_0 [1 + \cos(\omega\tau)] = 2I_0 [1 + \cos(2\omega\Delta L/c)]. \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

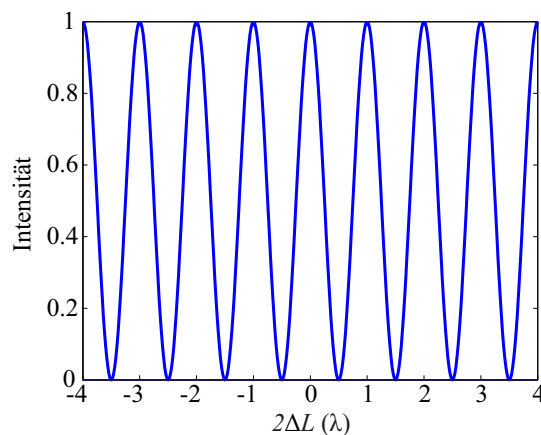


Abbildung 5.4: Intensität am Ausgang eines Michelsoninterferometer für kohärente Wellenüberlagerung .

Ein Michelson-Interferometer kann für extrem sensitive Abstandsmessungen verwendet werden. Beispielsweise beruht das Laser-Interferometer Gravitationswellen-Observatorium (LIGO), mit dem im Jahr 2015 erstmals Gravitationswellen nachgewiesen wurden, auf einem Michelson-Interferometer mit einer Armlänge von 4 km Länge. Durch die Verwendung von Fabry-Perot-Resonatoren in den beiden Interferometerarmen wird die effektive Armlänge auf über 1000 km gesteigert.

5.2.2 Youngscher Doppelspaltversuch

Experiment: Youngscher Doppelspaltversuch.

Im Folgenden analysieren wir den in Abbildung 5.5 dargestellten Doppelspaltversuch. Das Licht einer weit entfernten monochromatischen Lichtquelle fällt auf einen Spalt S_0 in einem lichtundurchlässigen Schirm. S_0 dient als punktförmige Lichtquelle, die zwei dünne Spalte S_1 und S_2 in einem zweiten lichtundurchlässigen Schirm beleuchtet. Das durch S_1 und S_2 transmittierte Licht wird auf einem weit entfernten dritten Schirm beobachtet.

5 Wellenüberlagerung und Interferenz

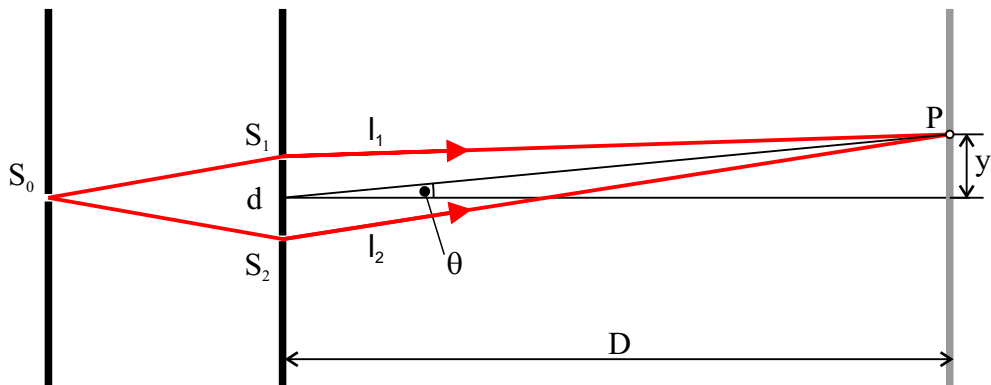


Abbildung 5.5: Youngscher Doppelspaltversuch.

Wir nehmen hier an, dass die Abstände $\overline{S_0S_1}$ und $\overline{S_0S_2}$ gleich groß sind. Die elektrischen Felder in den beiden Spalten schwingen damit in Phase. Für $d \ll D$ können wir die Weglängendifferenz $\Delta l = l_1 - l_2$ zwischen den beiden Spalten und dem Beobachtungspunkt bestimmen, indem wir das Lot von S_1 auf $\overline{S_2P}$ fällen (siehe Abbildung 5.6). Wir erhalten dann:

$$\Delta l = d \sin(\theta) \approx d\theta. \tag{5.2.4}$$

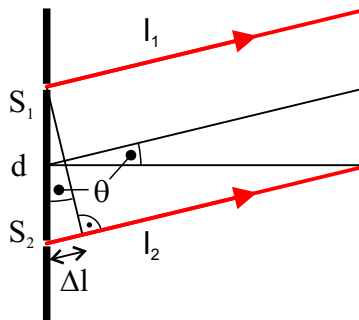


Abbildung 5.6: Weglängendifferenz beim Youngschen Doppelspaltversuch für einen weit entfernten Beobachtungsschirm.

Den Winkel θ entnehmen wir Abbildung 5.5:

$$\theta \approx \frac{y}{D}. \tag{5.2.5}$$

Insgesamt gilt damit für die Weglängendifferenz:

$$\Delta l = \frac{dy}{D}. \tag{5.2.6}$$

5 Wellenüberlagerung und Interferenz

Die Intensität in einem Punkt P auf dem Beobachtungsschirm ergibt sich aus der kohärenten Überlagerung der von den beiden Spalten emittierten Wellen:

$$I = 2I_0 [1 + \cos(k\Delta l)] = 4I_0 \cos^2\left(\frac{k\Delta l}{2}\right) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi dy}{\lambda D}\right). \quad (5.2.7)$$

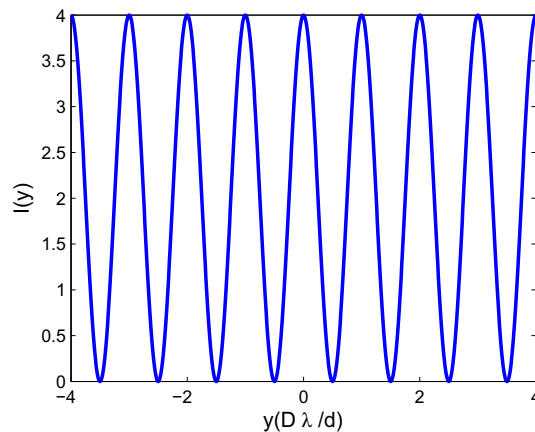


Abbildung 5.7: Intensität auf dem Beobachtungsschirm.

Die beiden Wellen interferieren konstruktiv, wenn die Weglängendifferenz ein vielfaches der Wellenlänge ist:

$$\Delta l = m\lambda. \quad (5.2.8)$$

Die zugehörige Position y_m des m -ten Interferenz-Maximums auf dem Beobachtungsschirm ist

$$y_m = \frac{Dm\lambda}{d}. \quad (5.2.9)$$

Der Abstand zwischen zwei Interferenzmaxima auf dem Schirm ergibt sich damit zu

$$y_{m+1} - y_m = \frac{D\lambda}{d}. \quad (5.2.10)$$

5.3 Vielstrahlinterferenz

Experiment: Pohlsche Glimmerplatte.

5.3.1 Fabry-Perot-Etalon

Wir betrachten eine dielektrische Platte der Dicke d und Brechzahl n_s , die nach beiden Seiten von Luft umgeben ist. Eine einfallende Welle wird zwischen den beiden Grenzflächen vielfach hin und her reflektiert. Um den Transmissions- und Reflexionsgrad der Platte zu bestimmen, müssen wir die einzelnen Partialwellen phasenrichtig aufsummieren. Die resultierende transmittierte Welle ergibt sich aus der Superposition der transmittierten Partialwellen:

$$E_t = E_0 t t' \underbrace{\left[1 + r'^2 e^{i\delta} + (r'^2 e^{i\delta})^2 + (r'^2 e^{i\delta})^3 + \dots \right]}_{\text{Geometrische Reihe}} = E_0 t t' \frac{1}{1 - r'^2 e^{i\delta}} \quad (5.3.1)$$

Hierbei ist:

- t : Amplituden-Transmissionskoeffizient der Grenzfläche Luft/Dielektrikum.
- t' : Amplituden-Transmissionskoeffizient der Grenzfläche Dielektrikum/Luft.
- r : Amplituden-Reflektionskoeffizient der Grenzfläche Luft/Dielektrikum.
- r' : Amplituden-Reflektionskoeffizient der Grenzfläche Dielektrikum/Luft.
- $\delta = 2k_0 n_s \cos(\theta_t) d$: Phasenunterschied zweier aufeinander folgender Partialwellen aufgrund von Propagation (Beweis: Übung).

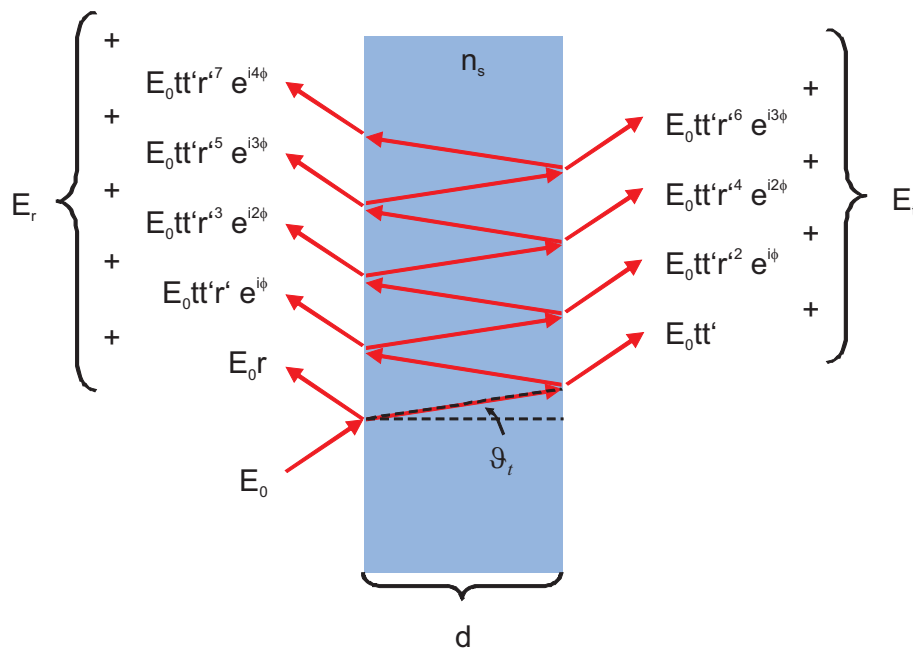


Abbildung 5.8: Interferenz der verschiedenen Partialwellen führt zur Ausbildung der resultierenden reflektierten und transmittierten Welle.

5 Wellenüberlagerung und Interferenz

Im Folgenden gehen wir von einem verlustfreien Medium aus. Aus den Fresnel-Formeln folgt für diesen Fall:

$$r' = -r \quad \text{und} \quad r^2 + tt' = 1 \quad (5.3.2)$$

Der Transmissionsgrad der Platte ist damit¹:

$$T = \frac{|E_t|^2}{|E_0|^2} = \frac{1}{1 + F \sin^2(\delta/2)} \quad (5.3.3)$$

mit dem Finesse-Koeffizienten

$$F = \left(\frac{2r}{1 - r^2} \right)^2. \quad (5.3.4)$$

Da wir ein verlustfreies Medium betrachten gilt

$$T + R = 1. \quad (5.3.5)$$

Somit folgt:

$$R = \frac{F \sin^2(\delta/2)}{1 + F \sin^2(\delta/2)}. \quad (5.3.6)$$

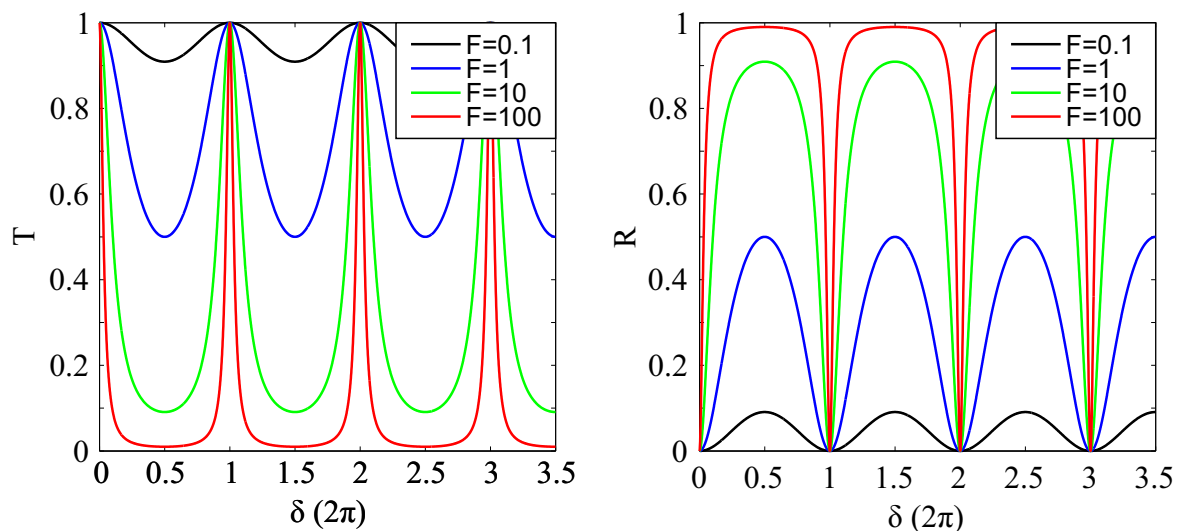


Abbildung 5.9: Transmissionsgrad (links) und Reflexionsgrad (rechts) einer dielektrischen Schicht für verschiedene Finesse-Koeffizienten F .

¹Beachte: Die Welle bewegt sich vor und hinter der Platte im selben Medium, so dass die zugehörigen Wellenvektoren parallel sind.

5 Wellenüberlagerung und Interferenz

Transmissions-Maxima treten auf, wenn alle transmittierten Partialwellen konstruktiv interferieren. Dies ist der Fall für

$$\delta = 2k_0 n_s \cos(\theta_t) d = 2m\pi, m \in \mathbb{N}. \quad (5.3.7)$$

Der freie Spektralbereich ist definiert als der Frequenzabstand zweier aufeinanderfolgender Transmissionsmaxima:

$$\Delta\nu_{FSR} = \nu_{m+1} - \nu_m = \frac{c_0}{2n_s \cos(\theta_t) d}. \quad (5.3.8)$$

Experiment: Fabry-Perot-Interferometer.

5.3.2 Dielektrischer Spiegel

Ein dielektrischer Spiegel besteht aus einer alternierenden Abfolge von mindestens zwei unterschiedlichen Arten von dielektrischen Schichten. Eine Lichtwelle, die auf diese Schichtfolge trifft, wird an jeder Grenzfläche gemäß den Fresnel-Formeln reflektiert. Die resultierende reflektierte Welle ergibt sich aus der Superposition aller Partialwellen.

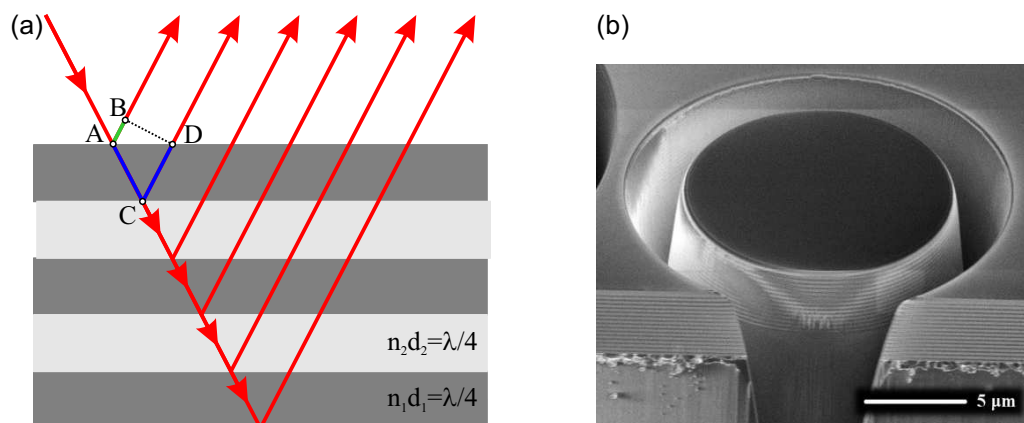


Abbildung 5.10: (a) Prinzip eines dielektrischen Spiegels. (b) Elektronenmikroskopische Aufnahme eines dielektrischen Spiegels bestehend aus alternierenden SiO_2 - und Ta_2O_5 -Schichten. Quelle: Wikipedia.

Ein hoher Reflexionsgrad erfordert die konstruktive Überlagerung aller Partialwellen, d.h., die Phasendifferenz $\Delta\varphi$ zwischen sukzessiven Partialwellen muss ein Vielfaches von 2π sein. Für senkrechten Lichteinfall wird diese Bedingung erfüllt, wenn jede Schicht eine optische Weglänge S von genau einem Viertel der Vakuum-Wellenlänge λ_0 aufweist:

$$S = n_i d_i = \lambda_0/4. \quad (5.3.9)$$

5 Wellenüberlagerung und Interferenz

Hierbei ist n_i der Brechungsindex der i -ten Schicht und d_i die zugehörige geometrische Dicke

Der optische Weglängenunterschied ΔS zwischen zwei sukzessiven Partialwellen beträgt

$$\Delta S = 2S = \lambda/2. \quad (5.3.10)$$

Dies entspricht einer Phasendifferenz aufgrund von Propagation von

$$\Delta\varphi_P = 2k_0 n_i d_i = \pi. \quad (5.3.11)$$

Zusätzlich ergibt sich noch eine Phasendifferenz von $\Delta\varphi_R = \pi$ aufgrund der Reflexion an den zwei unterschiedlichen Grenzflächen. Die gesamte Phasendifferenz ist damit wie gefordert:

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_P + \Delta\varphi_R = 2\pi. \quad (5.3.12)$$

5.3.3 Anti-Reflexbeschichtung

Reflexionen an der Grenzfläche zwischen zwei Medien sind für viele Anwendungen unerwünscht. Durch das Aufbringen einer geeigneten Anti-Reflexbeschichtung lassen sich diese Reflexionen unterdrücken. Im Folgenden wollen wir die benötigten Eigenschaften der Anti-Reflexbeschichtung herleiten.

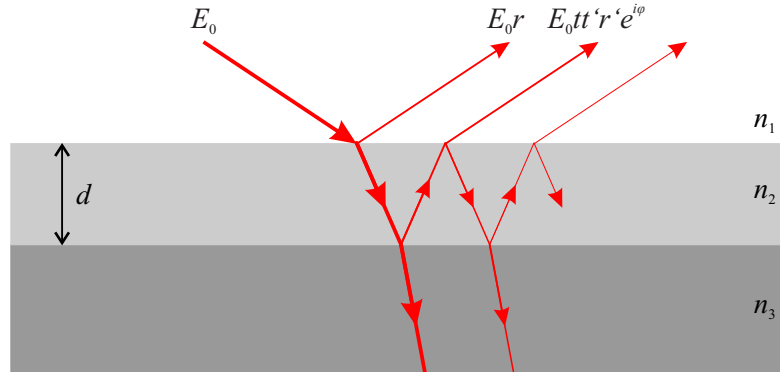


Abbildung 5.11: Prinzip einer Anti-Reflexbeschichtung.

Die einlaufende Welle habe die Amplitude E_0 (siehe Abbildung 5.11). Die resultierende reflektierte Welle ergibt sich wieder aus der Überlagerung aller reflektierten Partialwellen. In vielen technisch wichtigen Fällen (z.B. Luft-Glas-Grenzfläche) reicht die Betrachtung der ersten beiden Partialwellen mit den Amplituden E_0r und $E_0tt'r'$ aus.

Für senkrechten Einfall gilt:

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \quad r' = \frac{n_2 - n_3}{n_2 + n_3}, \quad t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}, \quad t' = \frac{2n_2}{n_1 + n_2}. \quad (5.3.13)$$

Üblicherweise ist $n_1 \approx n_2$, so dass $t \approx t' \approx 1$ gilt.

Die Bedingung $r = r'$ ist erfüllt, falls

$$\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{n_2 - n_3}{n_2 + n_3}. \quad (5.3.14)$$

Auflösen nach n_2 liefert:

$$n_2 = \sqrt{n_1 n_3}. \quad (5.3.15)$$

Die beiden Partialwellen interferieren destruktiv, falls für die Phasendifferenz die Bedingung $\varphi = (2m + 1)\pi$, $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ gilt². Damit folgt für die Dicke d der Anti-Reflexschicht:

$$d = \frac{(2m + 1)\lambda_0}{4n_2}. \quad (5.3.16)$$

5.4 Kohärenz

Bisher hatten wir bei der Wellenüberlagerung den Fall betrachtet, dass die Phasenverschiebung $\Delta\phi$ zwischen den Wellen an einem gegebenen Ort \mathbf{r} zeitlich konstant ist. In diesem Fall spricht man von kohärenter Wellenüberlagerung und die Intensität am Ort \mathbf{r} ist gegeben durch

$$I(\mathbf{r}) = I_1(\mathbf{r}) + I_2(\mathbf{r}) + 2\sqrt{I_1(\mathbf{r}) I_2(\mathbf{r})} \cos(\Delta\phi(\mathbf{r})) (\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2). \quad (5.4.1)$$

Ändert sich hingegen $\Delta\phi$ willkürlich und nimmt im Beobachtungszeitraum alle Werte zwischen 0 und 2π mit gleicher Wahrscheinlichkeit an, so spricht man von inkohärenter Wellenüberlagerung. Die zeitliche Mittelung führt zum Verschwinden des Interferenzterms, so dass die Intensität durch

$$I(\mathbf{r}) = I_1(\mathbf{r}) + I_2(\mathbf{r}). \quad (5.4.2)$$

gegeben ist.

Gründe für inkohärente Wellenüberlagerung:

- Die Teilwellen weisen unterschiedliche Frequenzen auf.
- Die Frequenzen der Wellen ändern sich mit der Zeit.
- Die Lichtquellen senden endliche Wellenzüge mit statistisch verteilten Phasen aus.
- Das Medium zwischen Quelle und Beobachtungsort besitzt einen zeitlich fluktuierenden Brechungsindex.
- Mechanische Vibrationen führen zu einer zeitlichen Änderung der optischen Wege.

²Beachte: Die Reflexion an den Grenzflächen ergibt hier keine zusätzliche Phasenverschiebung zwischen den Partialwellen.

5.4.1 Zeitliche Kohärenz

Experiment: Michelson Interferometer mit LED.

Um den Begriff der zeitlichen Kohärenz zu erklären, betrachten wir erneut das Michelson-Interferometer. Für eine beliebige linear polarisierte Welle mit Amplitude $E(r, t)$ als Eingangssignal erhalten wir am Ausgang des Interferometers folgende Intensität:

$$\begin{aligned}
 I(\tau) &= \frac{1}{2}c\epsilon_0\epsilon\langle|E(t)|^2\rangle = \frac{1}{2}c\epsilon_0\epsilon\langle|E_0(t) + E_0(t + \tau)|^2\rangle \\
 &= \frac{1}{2}c\epsilon_0\epsilon\langle[E_0(t) + E_0(t + \tau)][E_0^*(t) + E_0^*(t + \tau)]\rangle \\
 &= \frac{1}{2}c\epsilon_0\epsilon\langle|E_0(t)|^2\rangle + \frac{1}{2}c\epsilon_0\epsilon\langle|E_0(t + \tau)|^2\rangle \\
 &\quad + \frac{1}{2}c\epsilon_0\epsilon\langle E_0(t)E_0^*(t + \tau)\rangle + \frac{1}{2}c\epsilon_0\epsilon\langle E_0^*(t)E_0(t + \tau)\rangle \\
 &= 2I_0 + G^*(\tau) + G(\tau).
 \end{aligned} \tag{5.4.3}$$

Hierbei haben wir in der letzten Zeile die zeitliche Korrelationsfunktion

$$G(\tau) = \frac{1}{2}c\epsilon_0\epsilon\langle E_0^*(t)E_0(t + \tau)\rangle \tag{5.4.4}$$

eingeführt. Anschaulich beschreibt $G(\tau)$ das zeitliche „Gedächtnis“ der Welle. Wir definieren nun den komplexen zeitlichen Kohärenzgrad

$$g(\tau) = \frac{G(\tau)}{G(0)} = \frac{1}{2}c\epsilon_0\epsilon\frac{\langle E_0^*(t)E_0(t + \tau)\rangle}{I_0}. \tag{5.4.5}$$

Zusammenfassen der letzten Zeilen liefert schließlich für das Interferogramm:

$$\boxed{I(\tau) = 2I_0 [1 + \Re(g(\tau))] = 2I_0 [1 + |g(\tau)| \cos(\varphi(\tau))].} \tag{5.4.6}$$

Für den komplexen zeitlichen Kohärenzgrad gilt:

$$0 \leq |g(\tau)| \leq 1. \tag{5.4.7}$$

Hierbei entspricht die kohärente Wellenüberlagerung dem Fall $|g(\tau)| = 1$ während für inkohärente Wellenüberlagerung $|g(\tau)| = 0$ gilt.

Den Betrag des komplexen zeitlichen Kohärenzgrads kann man experimentell bestimmen, indem man die Intensitäten aufeinanderfolgender Maxima (I_{\max}) und Minima (I_{\min}) misst. Die sogenannte Sichtbarkeit V ist definiert als:

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}. \tag{5.4.8}$$

Da $\cos(\varphi(\tau))$ Werte zwischen -1 und 1 annehmen kann, gilt:

$$V = \frac{2I_0 [1 + |g(\tau)|] - 2I_0 [1 - |g(\tau)|]}{2I_0 [1 + |g(\tau)|] + 2I_0 [1 - |g(\tau)|]} = |g(\tau)|. \tag{5.4.9}$$

Interferogramm einer monochromatischen Welle

Wir betrachten zunächst noch einmal den Fall einer monochromatischen Welle:

$$E_0(t) = A e^{-i\omega_0 t}. \quad (5.4.10)$$

Der zugehörige komplexe zeitliche Kohärenzgrad lautet:

$$g(\tau) = e^{-i\omega_0 \tau}. \quad (5.4.11)$$

Wir erhalten damit für das Interferogramm:

$$I(\tau) = 2I_0 [1 + \cos(\omega_0 \tau)]. \quad (5.4.12)$$

Interferogramm einer Welle mit mehreren Frequenzkomponenten

Wir wollen nun den Fall einer Lichtquelle untersuchen, deren Spektrum $S(\omega) = |E(\omega)|^2$ in einem Bereich $\Delta\omega$ um die Zentralfrequenz ω_0 zentriert ist. Das emittierte Licht kann als Superposition von monochromatischen Wellen mit unterschiedlichen Frequenzen aus diesem Frequenzintervall aufgefasst werden. Die Teilwellen überlagern sich inkohärent, so dass wir die Interferogramme der einzelnen spektralen Komponenten zunächst separat betrachten können:

$$I_\omega(\tau) = 2S(\omega) [1 + \cos(\omega\tau)]. \quad (5.4.13)$$

Das Gesamtinterferogramm ergibt sich dann aus der Überlagerung der Interferogramme der einzelnen spektralen Komponenten:

$$I(\tau) = \int I_\omega(\tau) d\omega = \int 2S(\omega) [1 + \cos(\omega\tau)] d\omega. \quad (5.4.14)$$

Wir betrachten jetzt als instruktives Beispiel den Fall eines „Kastenspektrums“ mit spektraler Breite $\Delta\omega$ und Zentralfrequenz ω_0 . Für $\tau = 0$ überlagern sich alle Interferogramme in Phase. Nach der Kohärenzzeit

$$\tau_c = \frac{2\pi}{\Delta\omega} \quad (5.4.15)$$

erreicht der Phasenunterschied zwischen den beiden extremen Frequenzkomponenten $\omega_0 - \Delta\omega/2$ und $\omega_0 + \Delta\omega/2$ einen Wert von 2π . Die Überlagerung der einzelnen Interferogramme führt für Verzögerungen $\tau > \tau_c$ zur Unterdrückung des Interferenzsignals. Die Kohärenzzeit gibt damit anschaulich an, wie lange sich die Welle an die Phase an einem vorgegebenen Ort zu einem früheren Zeitpunkt „erinnert“.

Äquivalent zur Kohärenzzeit können wir auch eine longitudinale Kohärenzlänge l_c angeben:

$$l_c = c\tau_c. \quad (5.4.16)$$

Die longitudinale Kohärenzlänge l_c gibt anschaulich die Länge des Wellenzuges in Ausbreitungsrichtung an, für den die Phase einen definierten Wert annimmt.

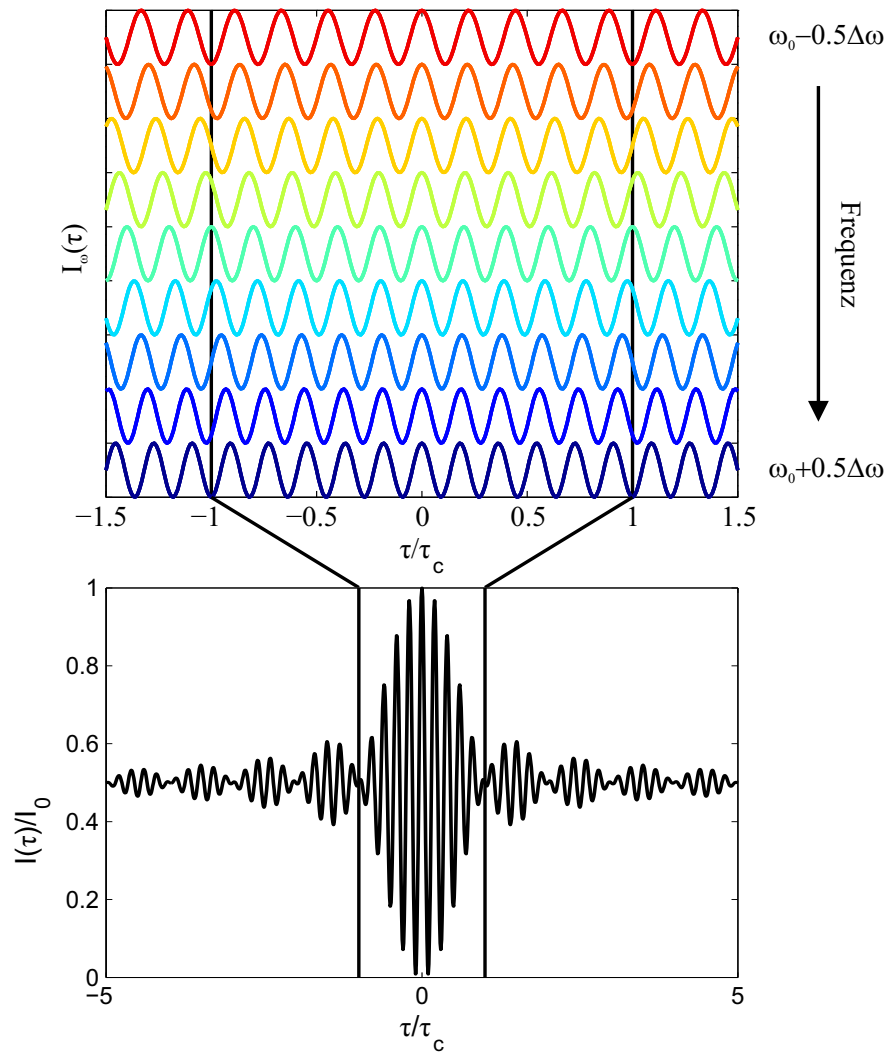


Abbildung 5.12: Oben: Interferogramme $I_\omega(\tau)$ der einzelnen spektralen Komponenten eines „Kastenspektrums“. Unten: Zugehöriges Gesamtinterferogramm.

5.4.2 Räumliche Kohärenz

Experiment: Youngscher Doppelspaltversuch mit ausgedehnter thermischer Lichtquelle.

Im Folgenden betrachten wir erneut den Youngschen Doppelspaltversuch. Wir untersuchen aber nun den Fall, dass die beiden Spalte S_1 und S_2 von einer ausgedehnten Lichtquelle der Breite b beleuchtet werden. Wir nehmen an, dass verschiedene Punkte der Lichtquelle unabhängig voneinander mit statistisch verteilten Phasen emittieren, so dass sich die zugehörigen Wellen inkohärent überlagern.

5 Wellenüberlagerung und Interferenz

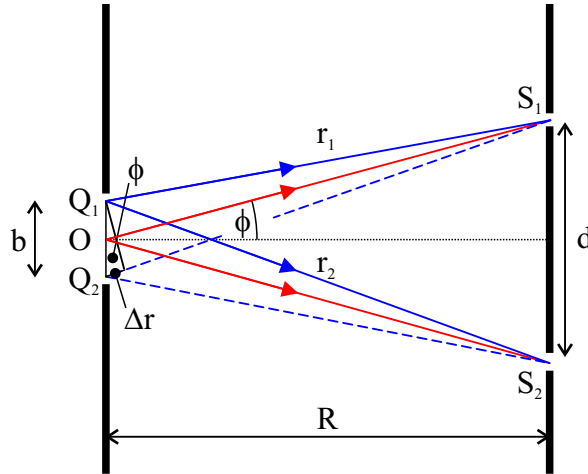


Abbildung 5.13: Beleuchtung mit einer ausgedehnten Lichtquelle.

Die Abstände von der Mitte der Lichtquelle O zu den beiden Spalten S_1 und S_2 seien gleich groß ($\overline{OS_1} = \overline{OS_2}$). Monochromatisches Licht, das von O emittiert wird, erzeugt damit auf dem Beobachtungsschirm ein Interferenzmuster der Form 5.2.7.

Als nächstes betrachten wir den Randpunkt Q_1 der Lichtquelle. Die Entfernungen von Q_1 zu den beiden Spalten S_1 und S_2 sind verschieden groß. Für die Weglängendifferenz gilt:

$$\Delta r = r_1 - r_2 = \overline{Q_1 S_1} - \overline{Q_1 S_2} = \overline{Q_1 S_1} - \overline{Q_2 S_1}. \quad (5.4.17)$$

Wir nehmen im Folgenden an, dass $R \gg b, d$. In diesem Fall gilt:

$$\Delta r \approx b \sin(\phi). \quad (5.4.18)$$

Abbildung 5.13 entnehmen wir

$$\tan(\phi) = \frac{d}{2R}. \quad (5.4.19)$$

Mit $\phi \approx \sin(\phi) \approx \tan(\phi)$ gilt:

$$\Delta r = \frac{bd}{2R}. \quad (5.4.20)$$

Aufgrund der Weglängendifferenz Δr weisen die von Q_1 ausgehenden Wellen in S_1 und S_2 eine Phasendifferenz $k\Delta r$ auf. Damit erhalten wir für den Punkt P auf dem Beobachtungsschirm:

$$I = 2I_0 [1 + \cos(k\Delta r + k\Delta l)] = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{k\Delta r + k\Delta l}{2} \right) = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi bd}{2\lambda R} + \frac{\pi dy}{\lambda D} \right).$$

(5.4.21)

Das Interferenzmuster besitzt die selbe Periode wie bei der Beleuchtung mit einer punktförmigen Lichtquelle. Allerdings sind die Positionen der Maxima im Vergleich zum vorherigen Fall um die Strecke

$$\Delta y = -\frac{bD}{2R} \quad (5.4.22)$$

auf dem Schirm verschoben.

Die Gesamtintensität im Punkt P ergibt sich durch die inkohärente Überlagerung aller durch die verschiedenen Punkte der Lichtquelle verursachten Interferenzmuster. Für $\Delta y = (y_{m+1} - y_m)/2$ wird das Interferenzsignal auf dem Beobachtungsschirm unterdrückt.

Zur Beobachtung von Interferenzeffekten muß der Abstand der Spalte S_1 und S_2 bei Beleuchtung mit einer ausgedehnten Lichtquelle kleiner als die transversale Kohärenzlänge l_t sein. Mit Hilfe von Gleichung (5.4.22) finden wir:

$$l_t = \frac{\lambda R}{b} = \frac{\lambda}{\Phi}. \quad (5.4.23)$$

Hierbei ist Φ der Winkel, unter dem die Lichtquelle von den Spalten aus gesehen wird.

6 Beugung

In diesem Kapitel wollen wir Beugungsphänomene untersuchen, die sich aus der räumlichen Begrenzung einer Welle, etwa durch eine Blende, ergeben. Wir werden sehen, dass sich hierbei deutliche Abweichungen von dem nach der geometrischen Optik zu erwartenden Verhalten zeigen. Historisch spielten Beugungsexperimente eine wichtige Rolle um den Wellencharakter von Licht in der Wissenschaft zu etablieren.

6.1 Huygenssches Prinzip

Experiment: Wellenwanne mit Kamm.

Als Ausgangspunkt für die anschauliche Erklärung von Beugungsphänomene werden wir das sogenannte Huygenssche Prinzip nutzen. Dieses besagt, dass jeder Punkt einer Wellenfront Ausgangspunkt für sekundäre Elementarwellen ist¹. Die Lage der Wellenfront zu einem späteren Zeitpunkt ergibt sich durch die Superposition dieser sekundären Elementarwellen.

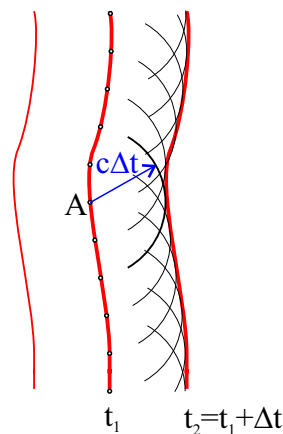


Abbildung 6.1: Huygenssches Prinzip.

In einem isotropen Medium breiten sich die sekundären Elementarwellen kugelförmig aus. Betrachten wir etwa den Ursprung des Koordinatensystems als Ausgangspunkt einer

¹Wir vernachlässigen in diesem Kapitel Polarisierungseffekte und behandeln das elektrische Feld als skalare Größe.

6 Beugung

sekundären Elementarwelle, so erhalten wir in der Ebene $z = d$:

$$E(x, y, z = d) = \frac{E_0}{r} e^{ikr} \quad (6.1.1)$$

mit

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + d^2}. \quad (6.1.2)$$

Für $d^2 \gg x^2 + y^2$ gilt $r \approx d \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{d^2} + \frac{y^2}{d^2} \right) \right]$. In diesem Fall können wir die Kugelwelle durch folgende Näherung beschreiben:

$$E(x, y, z = d) = \frac{E_0}{d} e^{ikd} e^{i\frac{k}{2} \left(\frac{x^2}{d} + \frac{y^2}{d} \right)}. \quad (6.1.3)$$

6.1.1 Brechung an einer Grenzfläche

Experiment: Wellenwanne mit Glasplatte.

Wir wollen zunächst das Brechungsgesetz anhand des Huygensschen Prinzips herleiten. Hierzu betrachten wir die Grenzfläche zwischen zwei Medien mit Brechungsindizes n_1 und n_2 .

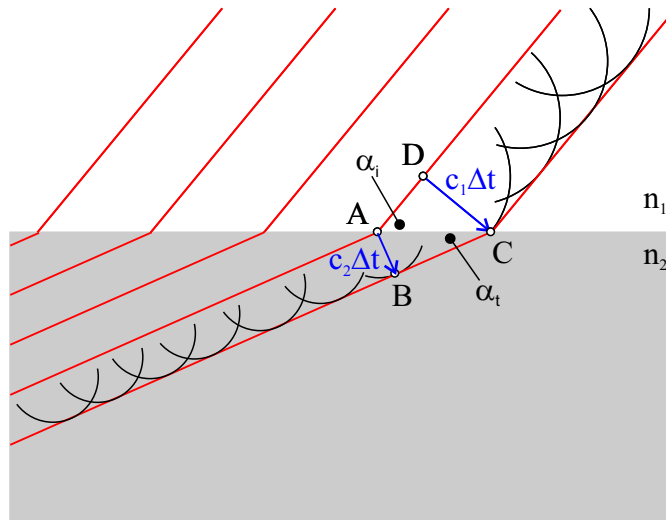


Abbildung 6.2: Brechung einer Welle an einer Grenzfläche.

Im Medium 1 breiten sich die kugelförmigen sekundären Elementarwellen mit der Geschwindigkeit $c_1 = c_0/n_1$ aus. Die Strecke \overline{DC} wird von den sekundären Elementarwellen in der Zeit Δt zurückgelegt:

$$\overline{DC} = \frac{\Delta t c_0}{n_1}. \quad (6.1.4)$$

6 Beugung

In der gleichen Zeit bewältigen die sekundären Elementarwellen im Medium 2 die Strecke \overline{AB} :

$$\overline{AB} = \frac{\Delta t c_0}{n_2}. \quad (6.1.5)$$

Mit $\sin(\alpha_i) = \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}}$ und $\sin(\alpha_t) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ (die Wellenfronten stehen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung) erhalten wir wieder das Brechungsgesetz:

$$n_1 \sin(\alpha_i) = n_2 \sin(\alpha_t). \quad (6.1.6)$$

6.1.2 Doppelbrechung

In einem uniaxialen Kristall ist der Brechungsindex (und damit die Phasengeschwindigkeit) der außerordentlichen Welle eine Funktion der Ausbreitungsrichtung. Die Phasenfronten der sekundären Elementarwellen sind im Fall der außerordentlichen Welle deshalb keine Kugeln sondern Ellipsoide. Der Brechungsindex der ordentlichen Welle hängt dagegen nicht von der Ausbreitungsrichtung ab. Dieser Fall kann deshalb analog zum vorherigen Abschnitt behandelt werden.

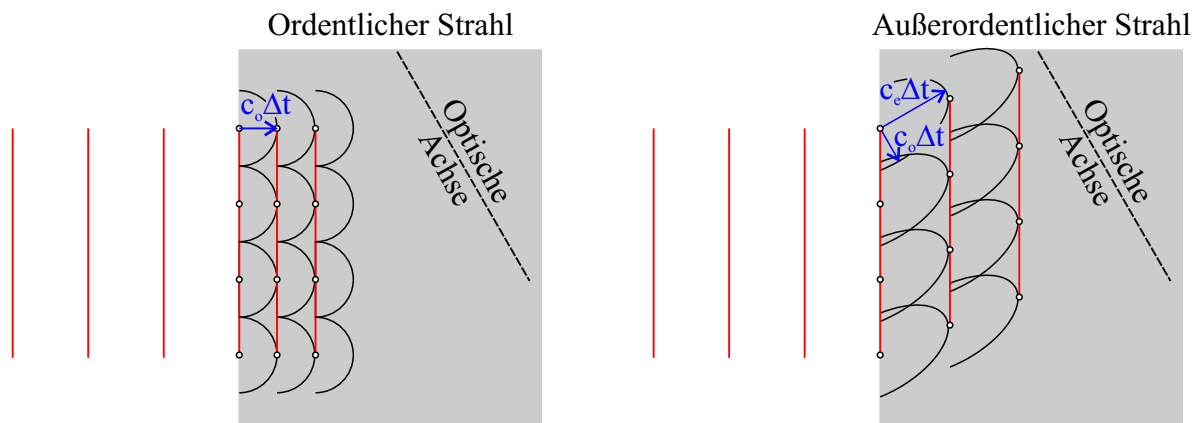


Abbildung 6.3: Doppelbrechung.

Fällt eine unpolarisierte Welle senkrecht auf einen uniaxialen Kristall, so tritt die ordentliche Welle senkrecht durch die Grenzfläche (siehe Abbildung 6.3, links). Die außerordentliche Welle wird dagegen „seitlich versetzt“ (siehe Abbildung 6.3, rechts), so dass sie schräg durch den Kristall läuft. In Übereinstimmung mit unserer Diskussion in Kapitel 4.3.2 sind die zugehörigen Phasenfronten aber weiterhin parallel zur Grenzfläche.

6.1.3 Wellenausbreitung und Huygenssches Prinzip

Wir wollen nun zeigen, dass das Huygenssche Prinzip kompatibel mit unseren bisherigen Überlegungen zur Wellenausbreitung ist. Hierzu betrachten wir eine monochromatische

6 Beugung

elektromagnetische Welle in einem isotropen Medium. Wir stellen das elektrische Feld der Welle in der Ebene $z = 0$ als Fourier-Integral dar:

$$E(x, y, z = 0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(k_x, k_y, z = 0) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \quad (6.1.7)$$

mit

$$E(k_x, k_y, z = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(x, y, z = 0) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy. \quad (6.1.8)$$

Wir können Gleichung (6.1.7) so interpretieren, dass sich die Feldverteilung $E(x, y, z = 0)$ aus der Überlagerung von ebenen Wellen

$$\mathcal{E}(x, y, z) = E(k_x, k_y, z = 0) e^{i(k_x x + k_y y \pm k_z z)} \quad (6.1.9)$$

ergibt. Aufgrund der Dispersionsrelation ist hierbei k_z gegeben durch

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}. \quad (6.1.10)$$

Im Folgenden nehmen wir an, dass sich alle Lichtquellen bei negativen z -Koordinaten befinden, so dass wir uns auf positive Werte von k_z beschränken können. Um das elektrische Feld $E(X, Y, z = d)$ der Welle in einem Punkt $(X, Y, z = d)$ in der Ebene $z = d$ zu bestimmen, betrachten wir zunächst den Beitrag einer einzelnen ebenen Welle mit Wellenvektor $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$. Deren Feldverteilung in der Ebene $z = d$ können wir mit Hilfe der Übertragungsfunktion $\mathcal{H}(k_x, k_y)$ schreiben als

$$\mathcal{E}(X, Y, z = d) = \mathcal{H}(k_x, k_y) \mathcal{E}(X, Y, z = 0) \quad (6.1.11)$$

mit

$$\mathcal{H}(k_x, k_y) = e^{i k_z d} = e^{i \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} d}. \quad (6.1.12)$$

Eine wichtige Eigenschaft der Übertragungsfunktion ist, dass ihr Betrag $|\mathcal{H}(k_x, k_y)|$ für Wellenvektoren mit $k_x^2 + k_y^2 > k^2$ exponentiell mit dem Abstand d abfällt. Daher tragen effektiv nur die ebenen Wellen mit $k_x^2 + k_y^2 < k^2$ zur Feldverteilung $E(x, y, z = d)$ bei. In anderen Worten, die Propagation in einem isotropen Medium wirkt wie ein Tiefpassfilter, durch den feine Details der ursprünglichen Feldverteilung $E(x, y, z = 0)$ verloren gehen.

Als instruktives Beispiel betrachten wir eine Blende mit mehreren runden Löchern (Radius $r = 0.25\lambda$) die in einem Abstand von 0.9λ kreuzförmig angeordnet sind (siehe Abbildung 6.5). Wir nehmen an, dass das elektrische Feld $E(x, y, z = 0)$ in der Blendenebene ($z = 0$) nur innerhalb der Löcher einen von Null verschiedenen Wert besitzt. Aufgrund des Subwellenlängenabstands der Löcher weist $E(k_x, k_y, z = 0)$ auch Komponenten mit $k_x^2 + k_y^2 > k^2$ auf. Bereits im Abstand $z = 2\lambda$ sind die Amplituden dieser Komponenten sehr

6 Beugung

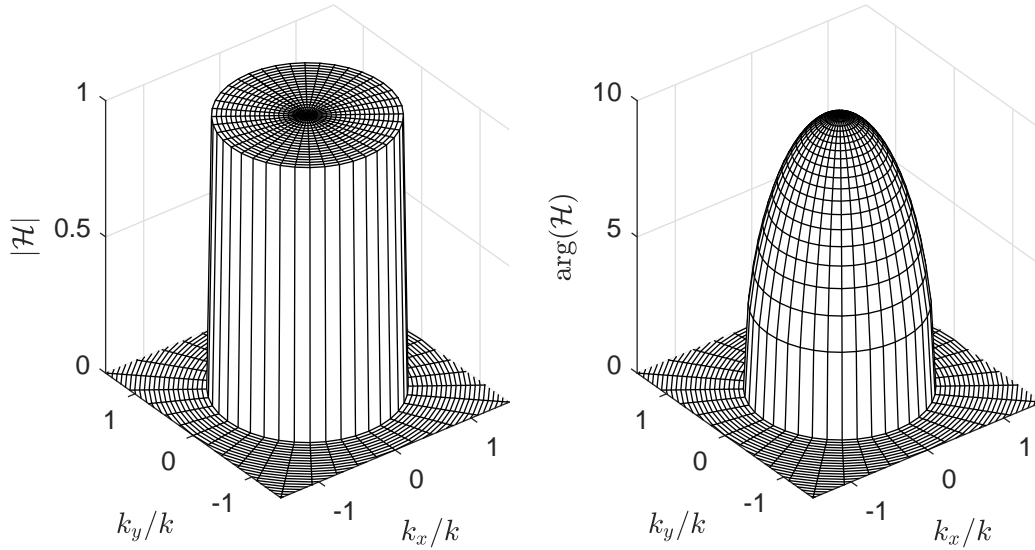


Abbildung 6.4: Absolutwert und Phase der Übertragungsfunktion $\mathcal{H}(k_x, k_y)$ im Abstand $d = 5\lambda$.

stark abgefallen und tragen daher nicht mehr zur Feldverteilung bei. Als Konsequenz können die einzelnen Löcher nicht mehr klar aufgelöst werden.

Wir wollen nun annehmen, dass bei der Fourier-Entwicklung der ursprünglichen Feldverteilung nur ebene Wellen mit $k_x^2 + k_y^2 \ll k^2$ eine Rolle spielen. In diesem Fall können wir die Übertragungsfunktion vereinfachen. Hierzu schreiben wir

$$\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}d = kd\sqrt{1 - \frac{k_x^2}{k^2} - \frac{k_y^2}{k^2}} \approx kd \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{k_x^2}{k^2} + \frac{k_y^2}{k^2} \right) + \frac{1}{8} \left(\frac{k_x^2}{k^2} + \frac{k_y^2}{k^2} \right)^2 + \dots \right]. \quad (6.1.13)$$

Im Rahmen der sogenannten Fresnel-Näherung vernachlässigen wir den dritten sowie alle folgenden Terme. In diesem Fall können wir für die Übertragungsfunktion die folgende Näherung angeben:

$$\mathcal{H}(k_x, k_y) \approx \mathcal{H}_0 e^{-i\frac{d}{2k}(k_x^2 + k_y^2)}. \quad (6.1.14)$$

mit

$$\mathcal{H}_0 = e^{ikd}. \quad (6.1.15)$$

Damit diese Näherung gültig ist, muss die Bedingung $\frac{kd}{8} \left(\frac{k_x^2}{k^2} + \frac{k_y^2}{k^2} \right)^2 \ll 1$ erfüllt sein. Für die elektrische Feldverteilung in der Ebene $z = d$ erhalten wir dann:

$$E(X, Y, z = d) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}(k_x, k_y) E(k_x, k_y, z = 0) e^{i(k_x X + k_y Y)} dk_x dk_y. \quad (6.1.16)$$

6 Beugung

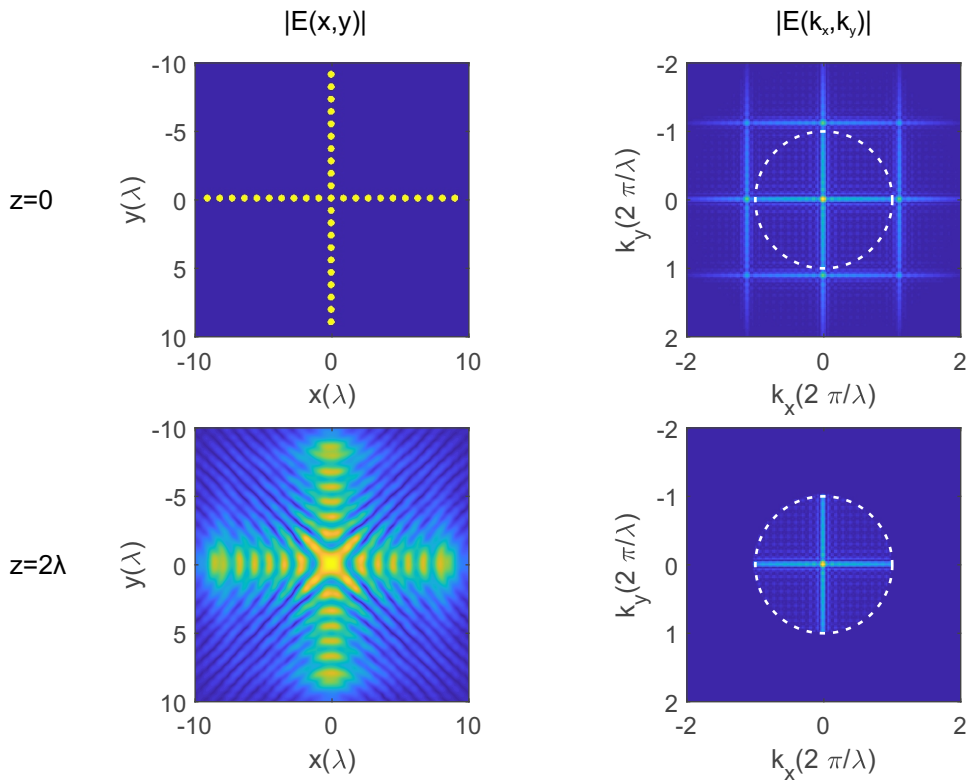


Abbildung 6.5: Elektrische Feldverteilung (links: Ortsraum, rechts: Fourier-Raum) direkt hinter einer Blende ($z = 0$) und im Abstand $z = 2\lambda$. Außerhalb der gestrichelten Kreise sind die Wellen evaneszent.

Durch Anwendung des Faltungssatzes der Fourier-Transformation können wir dies umschreiben zu:

$$E(X, Y, z = d) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}(X - x, Y - y) E(x, y, z = 0) dx dy. \quad (6.1.17)$$

Hierbei ist die sogenannte Impulsantwort $\mathcal{H}(x, y)$ die inverse Fourier-Transformierte der Übertragungsfunktion $\mathcal{H}(k_x, k_y)$. Mit der Hilfe von $\int_0^{\infty} e^{\pm iax^2} dx = e^{\pm i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{4a}}$, $a > 0$ finden wir nach einer kurzen Rechnung:

$$\mathcal{H}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(k_x, k_y) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y = \frac{1}{i\lambda d} e^{ikd} e^{i\frac{k}{2d}(x^2 + y^2)}. \quad (6.1.18)$$

Es ist nun instruktiv eine punktförmige Quelle $E(x, y, z = 0) = E_0 \delta(x) \delta(y)$ im Ursprung zu betrachten. Nach Gleichung (6.1.17) ist dann $E_0 \mathcal{H}(x, y)$ das elektrische Feld dieser Quelle in der Ebene $z = d$. Ein Vergleich mit Gleichung (6.1.3) zeigt, dass die Impulsantwort $\mathcal{H}(x, y)$ die Ausbreitung einer Huygensschen Sekundärwelle für $d^2 \gg x^2 + y^2$ beschreibt.

6.2 Beugung an einer ebenen Blende

Im Folgenden wollen wir die Beugung einer monochromatischen Welle durch eine ebene Blende diskutieren². Die elektrische Feldstärke der Welle in der Blendenebene sei $E(x, y, z = 0)$. Wir nehmen an, dass $E(x, y, z = 0)$ nur innerhalb der Blende einen von null verschiedenen Wert besitzt:

$$E(x, y, z = 0) = E_0 t(x, y) \quad (6.2.1)$$

mit

$$t(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathbf{S} = (x, y, 0) \text{ in der Blende} \\ 0 & \text{falls } \mathbf{S} = (x, y, 0) \text{ auf dem Schirm} \end{cases} \quad (6.2.2)$$

Unser Ziel ist es nun, die resultierende Feldverteilung $E(X, Y, z = d)$ in der Ebene $z = d$ zu bestimmen.

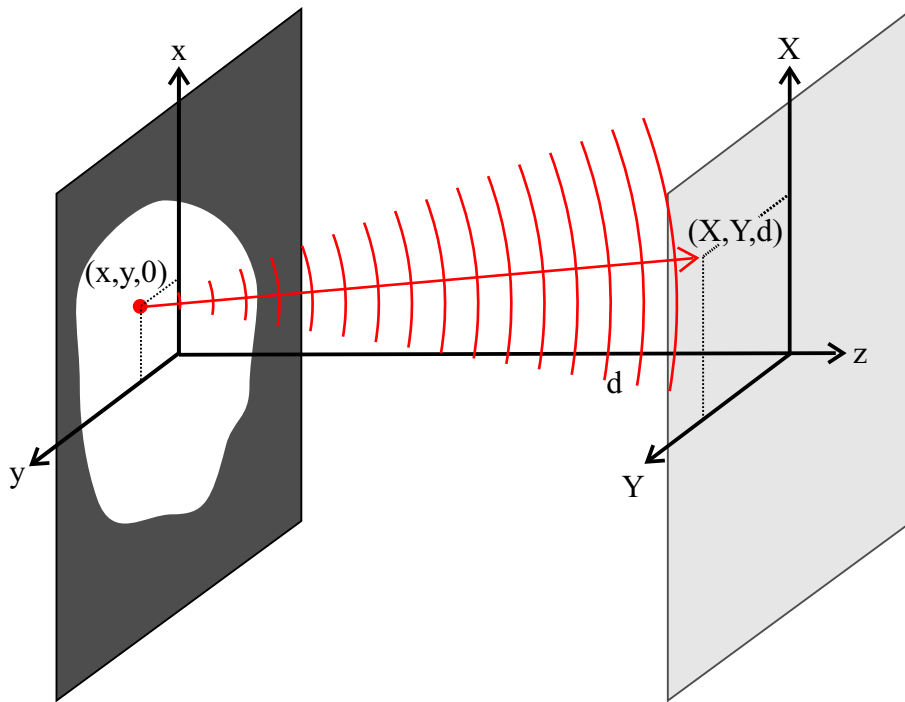


Abbildung 6.6: Beugung an einer ebenen Blende. Jeder Punkt der Blende ist die Quelle einer Huygensschen Sekundärwelle.

6.2.1 Fresnel-Beugung

Wir betrachten zunächst die Beugung von Licht an einer Blende im Rahmen der Fresnel-Näherung. In diesem Fall können wir mit Hilfe von Gleichung (6.1.17) die elektrische

²Als Blende bezeichnen wir eine Öffnung in einem ansonsten lichtundurchlässigen Schirm.

6 Beugung

Feldverteilung in der Ebene $z = d$ schreiben als:

$$E(X, Y, z = d) = \frac{E_0}{i\lambda d} e^{ikd} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t(x, y) e^{i\frac{k}{2d}[(X-x)^2+(Y-y)^2]} dx dy. \quad (6.2.3)$$

Anschaulich können wir diese Gleichung so verstehen, dass von jedem Punkt der Blende eine Huygenssche Sekundärwelle ausgeht. Die Überlagerung dieser Huygensschen Sekundärwellen ergibt dann die Feldverteilung in der Ebene $z = d$. Im Allgemeinen kann Gleichung (6.2.3) allerdings nur numerisch gelöst werden. Abbildung 6.7 zeigt exemplarisch die berechnete Intensitätsverteilung für verschiedene Abstände d hinter einem 1 mm breiten Spalt, der mit Licht der Wellenlänge $\lambda = 600 \text{ nm}$ beleuchtet wird.

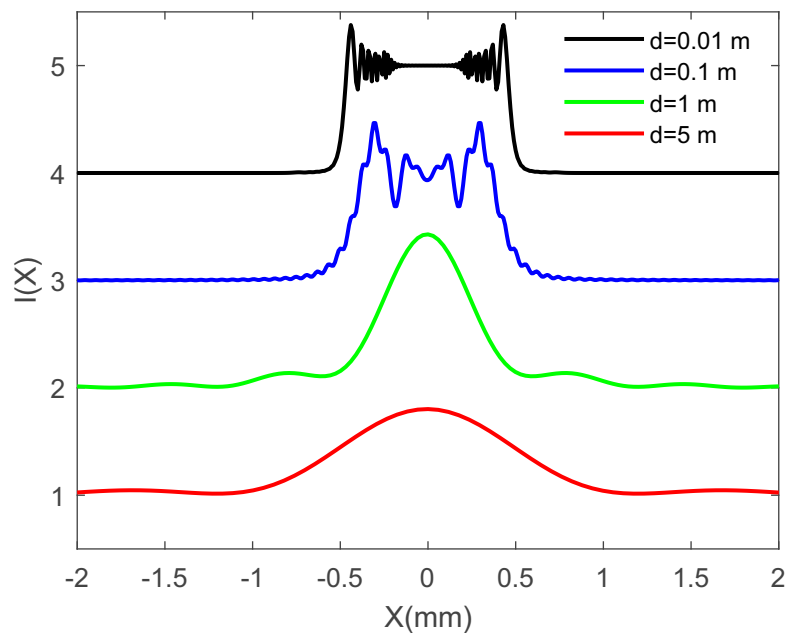


Abbildung 6.7: Berechnete Intensitätsverteilung hinter einem 1 mm breiten Spalt, der mit Licht der Wellenlänge $\lambda = 600 \text{ nm}$ beleuchtet wird.

6.2.2 Fraunhofer-Beugung

In der Fraunhoferschen Näherung wird angenommen, dass der Abstand d im Vergleich zu allen anderen Dimensionen sehr groß ist (Fernzone). In diesem Fall können wir die

6 Beugung

Impulsantwort $\mathcal{H}(X - x, Y - y)$ weiter vereinfachen. Hierzu schreiben wir:

$$\mathcal{H}(X - x, Y - y) = \frac{1}{i\lambda d} e^{ikd} e^{i\frac{k}{2d}((X-x)^2 + (Y-y)^2)} \quad (6.2.4)$$

$$= \frac{1}{i\lambda d} e^{ikd} e^{i\frac{k}{2d}(X^2 + Y^2 - 2xX - 2yY + x^2 + y^2)} \quad (6.2.5)$$

$$\approx \frac{1}{i\lambda R} e^{ikR} e^{i\frac{k}{2R}(-2xX - 2yY)}. \quad (6.2.6)$$

mit

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + d^2}. \quad (6.2.7)$$

Für die elektrische Feldverteilung in der Ebene $z = d$ erhalten wir mit dieser Näherung:

$$E(X, Y, z = d) = \frac{E_0}{i\lambda R} e^{ikR} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t(x, y) e^{i\frac{k}{2R}(-2xX - 2yY)} dx dy. \quad (6.2.8)$$

Das Integral kann als die räumliche Fourier-Transformierte der Blende identifiziert werden:

$$\mathcal{F}\{t(x, y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t(x, y) e^{-i(\frac{kX}{R}x + \frac{kY}{R}y)} dx dy. \quad (6.2.9)$$

In der Fraunhoferschen Näherung ist die Intensitätsverteilung in der Ebene $z = d$ (bis auf einen Vorfaktor) somit durch das Betragsquadrat der räumlichen Fourier-Transformierten der Blende gegeben:

$$\boxed{I(X, Y, z) \propto |\mathcal{F}\{t(x, y)\}|^2}. \quad (6.2.10)$$

6.2.3 Fraunhofer-Beugung an einer rechteckigen Blende

Experiment: Beugung an einer rechteckigen Blende.

Als erstes Beispiel betrachten wir die Fraunhofer-Beugung an einer rechteckigen Blende mit Seitenlängen a und b :

$$t(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |x| \leq a/2, |y| \leq b/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.2.11)$$

Nach Gleichung (6.2.8) ist das elektrische Feld der gebeugten Welle in der Ebene $z = d$ gegeben durch:

$$E(X, Y, z) = \frac{E_0}{i\lambda R} e^{ikR} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-i\frac{kX}{R}x} dx \int_{-b/2}^{b/2} e^{-i\frac{kY}{R}y} dy. \quad (6.2.12)$$

Mit

$$\alpha = \frac{kaX}{2R} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{kbY}{2R} \quad (6.2.13)$$

folgt

$$E(\alpha, \beta) = \frac{E_0}{i\lambda R} e^{ikR} ab \left(\frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \right) \left(\frac{\sin(\beta)}{\beta} \right). \quad (6.2.14)$$

Für die Intensität der gebeugten Welle finden wir somit:

$$I(\alpha, \beta) = I_0 \left(\frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \right)^2 \left(\frac{\sin(\beta)}{\beta} \right)^2. \quad (6.2.15)$$

Hierbei ist I_0 die Intensität im Punkt $\mathbf{P}_0 = (0, 0, z = d)$. Ist eine der Dimensionen der Blende (z.B. b) viel größer als die Wellenlänge, so haben wir es effektiv mit einem eindimensionalen Problem zu tun, d.h. einem Spalt. Das zentrale Beugungsmaximum ist dann in β -Richtung viel schmaler als in α -Richtung.

Im Folgenden diskutieren wir die Intensitätsverteilung entlang der α -Richtung mit $\beta = 0$:

- Das zentrale Beugungsmaximum wird für $\alpha = 0$ angenommen.
- Nebenmaxima treten für $|\alpha| = (2m + 1)\frac{\pi}{2}$, $m = 1, 2, 3, \dots$ auf. Mit $X/R = \sin(\theta)$ folgt für den Winkel $\theta_{max,m}$, unter dem das m -te Nebenmaximum beobachtet werden kann:

$$\sin(\theta_{max,m}) = \frac{(2m + 1) \lambda}{2} \frac{1}{a}. \quad (6.2.16)$$

- Die Intensität im ersten Nebenmaximum ($m=1$) beträgt ungefähr 5% der Intensität des zentralen Beugungsmaximums.
- Die Intensität nimmt für $|\alpha| = m\pi$, $m = 1, 2, 3, \dots$ den Wert Null an. Für die zugehörigen Winkel gilt:

$$\sin(\theta_{0,m}) = m \frac{\lambda}{a}. \quad (6.2.17)$$

6.2.4 Beugung am Einzelspalt

Experiment: Beugung am Einzelspalt.

Wir wollen nun für einen Spalt der Breite a die durch Beugung resultierende Intensitätsverteilung zusätzlich noch anhand eines einfachen Modells herleiten. Wir nehmen hierzu an, dass sich im Spalt N regelmäßig angeordnete Oszillatoren mit Abstand Δa befinden, die von einer ebenen Welle zu erzwungenen Schwingungen angeregt werden.

Die Gesamtamplitude der in Richtung θ gestreuten Welle ergibt sich durch die Überlagerung der gestreuten Wellen der einzelnen Oszillatoren:

$$E = A_0 \sum_{j=1}^N e^{i(\varphi_j - \omega t)}. \quad (6.2.18)$$

6 Beugung

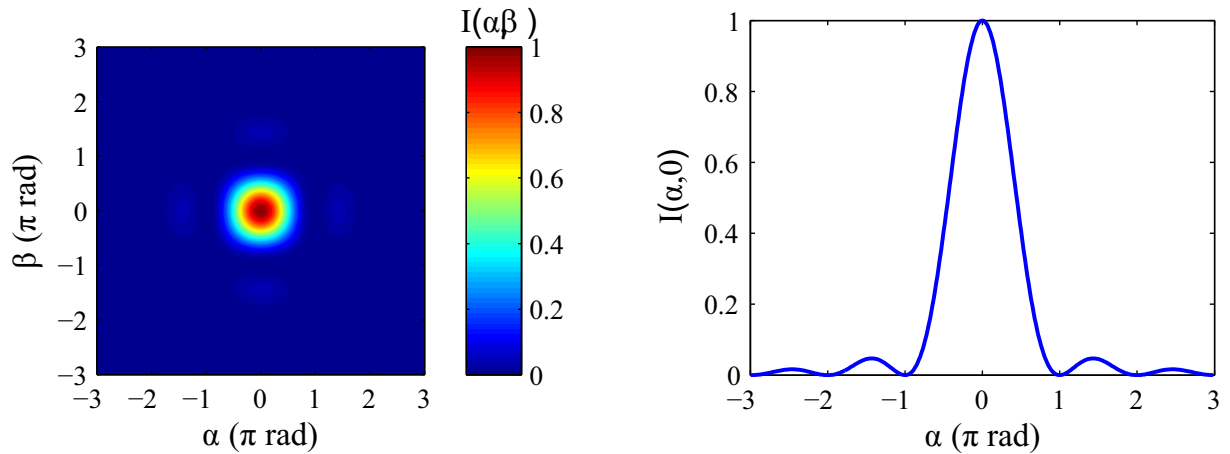


Abbildung 6.8: Beugung an einer quadratischen Blende. Links: $I(\alpha, \beta)$. Rechts: $I(\alpha, 0)$.

Hierbei ist A_0 die Amplitude und φ_j die Phase der vom j -ten Oszillator gestreuten Welle. Aus dem Wegunterschied $\Delta s = \Delta a \sin(\theta)$ zwischen zwei benachbarten Wellen resultiert die Phasendifferenz

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta s = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta a \sin(\theta). \quad (6.2.19)$$

Wir setzen die Phase der ersten Welle $\varphi_0 = 0$ und erhalten

$$\begin{aligned} E &= A_0 \sum_{j=1}^N e^{i(\varphi_j - \omega t)} = A_0 e^{-i\omega t} \sum_{j=1}^N e^{i(j-1)\Delta\varphi} \\ &= A_0 e^{-i\omega t} \frac{e^{iN\Delta\varphi} - 1}{e^{i\Delta\varphi} - 1} = A_0 e^{-i\omega t} e^{i\frac{N-1}{2}\Delta\varphi} \left(\frac{e^{i\frac{N}{2}\Delta\varphi} - e^{-i\frac{N}{2}\Delta\varphi}}{e^{i\Delta\varphi/2} - e^{-i\Delta\varphi/2}} \right) \\ &= A_0 e^{-i\omega t} e^{i\frac{N-1}{2}\Delta\varphi} \left(\frac{\sin\left(\frac{N}{2}\Delta\varphi\right)}{\sin\left(\Delta\varphi/2\right)} \right). \end{aligned} \quad (6.2.20)$$

Die Intensität der Welle ist somit:

$$I(\theta) = |E|^2 = I_0 \frac{\sin^2\left(N\pi \frac{\Delta a}{\lambda} \sin(\theta)\right)}{\sin^2\left(\pi \frac{\Delta a}{\lambda} \sin(\theta)\right)}. \quad (6.2.21)$$

Wir ersetzen nun die diskreten Oszillatoren durch eine kontinuierliche Verteilung von Oszillatoren entlang der Strecke Δa . Die zugehörige Amplitude ist proportional zur Länge Δa :

$$A = A_0 \frac{\Delta a}{a}. \quad (6.2.22)$$

6 Beugung

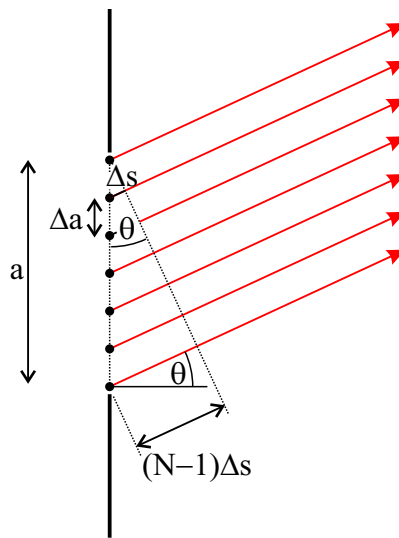


Abbildung 6.9: Abstrahlung von N regelmäßig angeordneten Oszillatoren.

Mit $\alpha = \pi(a/\lambda) \sin(\theta)$ folgt:

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\Delta a}{a} \right)^2 \frac{\sin^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha/N)}. \quad (6.2.23)$$

Wir betrachten nun $N \rightarrow \infty$. Mit $\sin^2(\alpha/N) \rightarrow \alpha^2/N^2$ erhalten wir gerade wieder das zuvor hergeleitete Ergebnis:

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2(\alpha)}{\alpha^2}. \quad (6.2.24)$$

Im Rahmen des Oszillator-Modells können die Winkel, unter denen Nullstellen der Intensität beobachtet werden, einfach und anschaulich bestimmt werden. Wir wollen dies für den Fall $m = 1$ diskutieren. Für $\sin(\theta) = \lambda/a$ ist der Wegunterschied zwischen der ersten und letzten Teilwelle gerade λ . Wir teilen den Spalt nun in Gedanken in zwei Hälften. Wir finden zu jedem Oszillator in der ersten Hälfte einen Oszillator in der zweiten Hälfte, so dass der Wegunterschied gerade $\lambda/2$ ist. Die Oszillatoren löschen sich damit paarweise aus und die Gesamtintensität verschwindet aufgrund der destruktiven Interferenz.

6.2.5 Beugung an einer kreisförmigen Blende

Experiment: Beugung an einer kreisförmigen Blende.

In der Praxis spielt die Beugung an kreisförmigen Blenden eine wichtige Rolle. Für eine Blende mit Radius a gilt:

$$t(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \sqrt{x^2 + y^2} \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.2.25)$$

6 Beugung

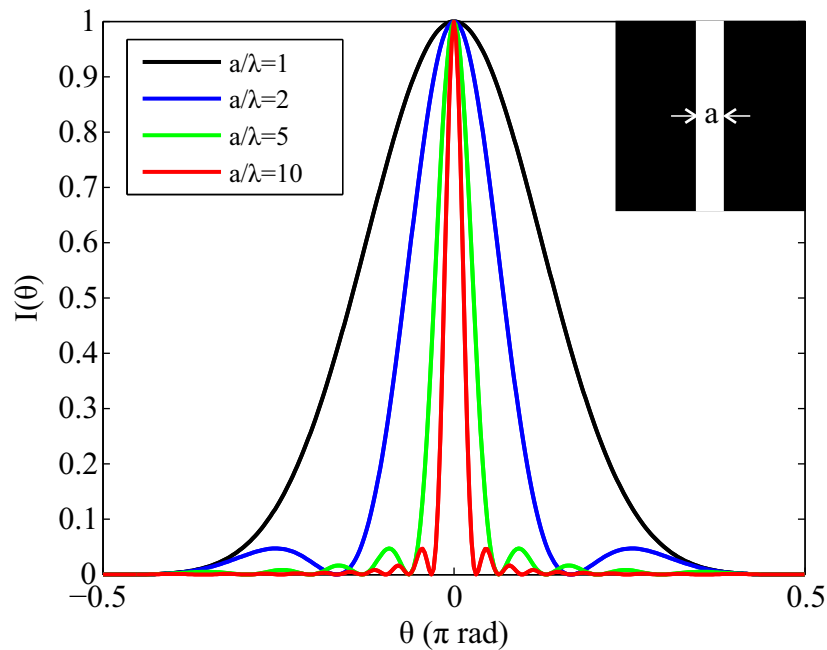


Abbildung 6.10: Intensitätsverteilung bei der Beugung an einem einzelnen Spalt für verschiedene Spaltbreiten.

Durch Verwendung von Gleichung (6.2.10) erhalten wir:

$$I(u) = I_0 \left(\frac{2J_1(u)}{u} \right)^2. \quad (6.2.26)$$

Hierbei ist $J_1(x)$ die Besselfunktion erster Ordnung und $u = ka \sin(\theta)$.

Die Beugung an einer kreisförmigen Blende führt zu einer rotationssymmetrischen Intensitätsverteilung mit einem zentralen Maximum (Beugungsscheibchen oder Airy-Scheibchen), das von Ringen mit rasch abnehmender Intensität umgeben ist. $I(u)$ weist für $u = 1.22\pi$ eine erste Nullstelle auf. Für den zugehörigen Winkel $\theta_{0,1}$ gilt:

$$\sin(\theta_{0,1}) = 0.61 \frac{\lambda}{a}. \quad (6.2.27)$$

6.2.6 Beugung am Doppelspalt

Experiment: Beugung am Doppelspalt.

6 Beugung

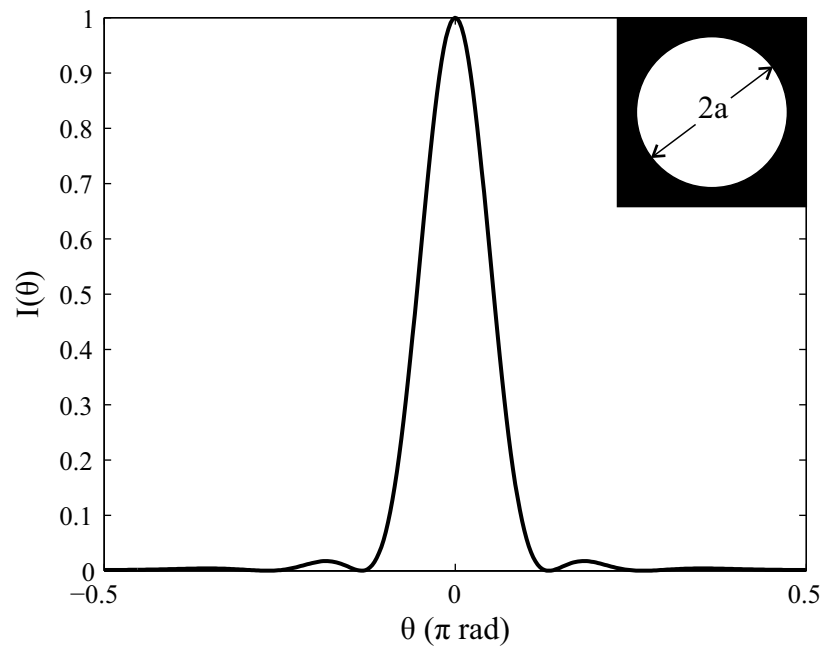


Abbildung 6.11: Beugung an einer kreisförmigen Blende ($a/\lambda = 1.5$).

Wir wollen nun den Youngschen Doppelspaltversuch für zwei Spalte mit endlichen Breiten a und Abstand d analysieren. In diesem Fall gilt³:

$$t(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } -d/2 - a/2 < x < -d/2 + a/2 \\ 1 & \text{für } d/2 - a/2 < x < d/2 + a/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.2.28)$$

³Wir beschränken uns auf den eindimensionalen Fall langer Spalte.

6 Beugung

Im Fernfeld gilt für die Welle⁴:

$$\begin{aligned}
 E(X) &= E_0 \int_{-\infty}^{\infty} t(x) e^{-i \frac{kX}{R} x} dx \\
 &= E_0 \int_{-d/2-a/2}^{-d/2+a/2} e^{-i \frac{kX}{R} x} dx + E_0 \int_{d/2-a/2}^{d/2+a/2} e^{-i \frac{kX}{R} x} dx \\
 &= E_0 \left[\frac{e^{-i \frac{kX}{R} x}}{-i \frac{kX}{R}} \right]_{-d/2-a/2}^{-d/2+a/2} + E_0 \left[\frac{e^{-i \frac{kX}{R} x}}{-i \frac{kX}{R}} \right]_{d/2-a/2}^{d/2+a/2} \\
 &= E_0 e^{i \frac{dkX}{2R}} a \frac{\sin\left(\frac{kX}{R} \frac{a}{2}\right)}{\frac{kX}{R} \frac{a}{2}} + E_0 e^{-i \frac{dkX}{2R}} a \frac{\sin\left(\frac{kX}{R} \frac{a}{2}\right)}{\frac{kX}{R} \frac{a}{2}} \\
 &= 2aE_0 \cos\left(\frac{dkX}{2R}\right) \frac{\sin\left(\frac{kX}{R} \frac{a}{2}\right)}{\frac{kX}{R} \frac{a}{2}} \tag{6.2.29}
 \end{aligned}$$

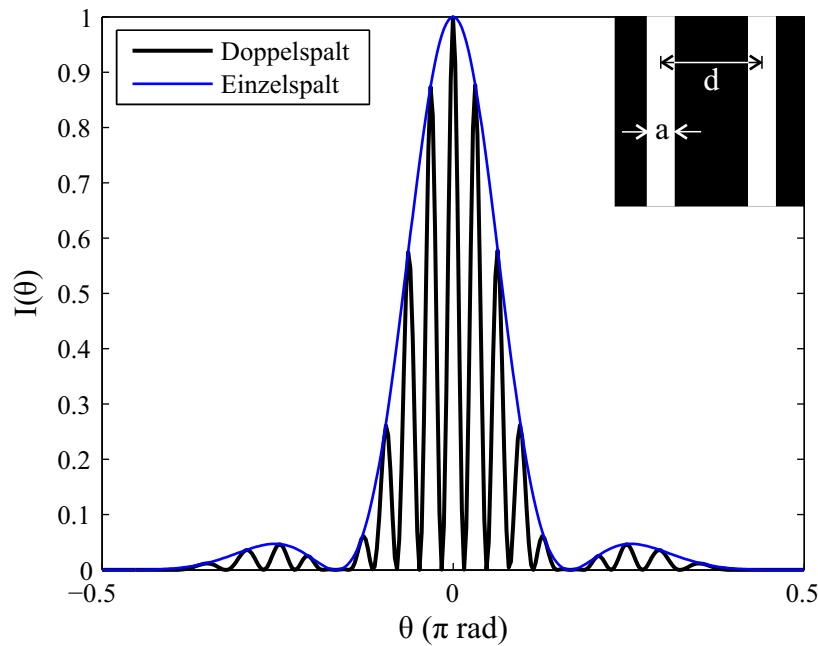


Abbildung 6.12: Intensitätsverteilung bei der Beugung an einem Doppelspalt ($a/\lambda = 2, d/\lambda = 10$).

Für die Intensität erhalten wir somit den folgenden Ausdruck:

$$I(X) = 4a^2 |E_0|^2 \left[\frac{\sin\left(\frac{kX}{R} \frac{a}{2}\right)}{\frac{kX}{R} \frac{a}{2}} \right]^2 \cos^2\left(\frac{dkX}{2R}\right). \tag{6.2.30}$$

⁴Die konstanten Vorfaktoren werden in E_0 zusammengefasst.

Der Vergleich mit Gleichungen (5.2.7) und (6.2.24) zeigt, dass die Intensitätsverteilung des Doppelspaltes gegeben ist durch die Intensitätsverteilung eines einzelnen Spalts moduliert mit dem Interferenzmuster eines Doppelspaltes mit punktförmigen Öffnungen.

6.2.7 Beugung an Gittern

Senkrechter Lichteinfall

Experiment: Beugung am Gitter.

Ein Beugungsgitter besteht aus einer regelmäßigen Anordnung von N parallelen Spalten. Analog zum Doppelspalt wird die Intensitätsverteilung hinter dem Gitter durch zwei Faktoren bestimmt:

- Beugung an den einzelnen Spalten mit Spaltbreite a .
- Interferenzmuster von N punktförmigen Oszillatoren mit Periode d .

Für senkrechten Lichteinfall findet man für die Intensität (Beweis: Übung):

$$I(\theta) = I_0 \underbrace{\frac{\sin^2 [\pi(a/\lambda) \sin(\theta)]}{[\pi(a/\lambda) \sin(\theta)]^2}}_{\text{Spaltfaktor}} \underbrace{\frac{\sin^2 [N\pi\frac{d}{\lambda} \sin(\theta)]}{\sin^2 [\pi\frac{d}{\lambda} \sin(\theta)]}}_{\text{Gitterfaktor}}. \quad (6.2.31)$$

Hierbei ist I_0 die Intensität für die Vorwärtsrichtung ($\theta = 0$) hinter einem einzelnen Spalt. Aufgrund des Gitterfaktors weist $I(\theta)$ für die Richtungen ein Maximum auf, für die der Weglängenunterschied Δs zwischen äquivalenten Teilstrahlen aus zwei benachbarten Spalten gerade ein Vielfaches m der Wellenlänge ist:

$$\Delta s = d \sin(\theta_{\max,m}) = m\lambda. \quad (6.2.32)$$

Die entsprechenden Maxima heißen Beugungsmaxima m -ter Ordnung.

Die Intensität in den verschiedenen Ordnungen wird durch den Spaltfaktor bestimmt. Dies ist anschaulich verständlich, da nur durch die Beugung an den Einzelspalten Licht in Richtungen $\theta \neq 0$ gelangt.

Für die 0.-Ordnung finden wir:

$$I(0) = N^2 I_0. \quad (6.2.33)$$

Einzelne Ordnungen können unterdrückt werden, wenn sie mit einer Nullstelle des Spaltfaktors zusammenfallen. Zum Beispiel fehlt in Abbildung 6.13 aus diesem Grund die 2.-Ordnung.

Zwischen je zwei Hauptmaxima treten $(N - 2)$ Nebenmaxima auf, für die der Zähler des Gitterfaktors den Wert eins annimmt, der Nenner aber keine Nullstelle besitzt. Mit

6 Beugung

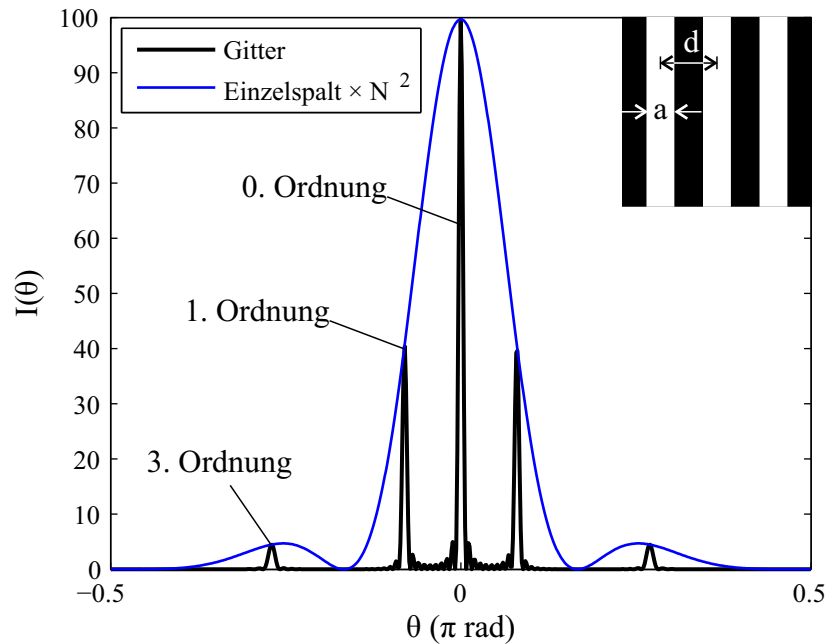


Abbildung 6.13: Intensitätsverteilung bei der Beugung an einem Gitter ($a/\lambda = 2$, $d/\lambda = 4$, $N = 10$).

wachsendem N verlieren die Nebenmaxima rasch an Bedeutung. Für die Nebenmaxima zwischen 0. und 1.-Ordnung gilt:

$$\sin(\theta_p) = \frac{2p+1}{2N} \frac{\lambda}{d}, p = 1, 2, \dots, N-2. \quad (6.2.34)$$

Die zugehörigen Nullstellen des Gitterfaktors sind gegeben durch:

$$\sin(\theta_{0,l}) = \frac{l}{N} \frac{\lambda}{d}, l = 1, 2, \dots, N-1. \quad (6.2.35)$$

Schräger Lichteinfall

Experiment: Beugung am Gitter, Hg Lampe.

Experiment: Beugung an einer CD.

Bisher haben wir angenommen, dass die einzelnen Spalte alle phasengleich beleuchtet werden. Diese Situation ergibt sich bei der Beleuchtung mit einer senkrecht einfallenden ebenen Welle. Wir wollen nun für ein Reflexionsgitter mit Periode d den Fall untersuchen, dass eine ebene Welle unter dem Winkel θ_i gegen die Gitternormale eingestrahlt wird.

Das Licht wird an den Furchen unter einem Winkel θ_o gegen die Gitternormale reflektiert⁵. Teilwellen von verschiedenen Furchen interferieren konstruktiv, wenn der Weglängenun-

⁵Ein- und Ausfallswinkel des Reflexionsgesetzes beziehen sich auf die Furchennormale.

6 Beugung

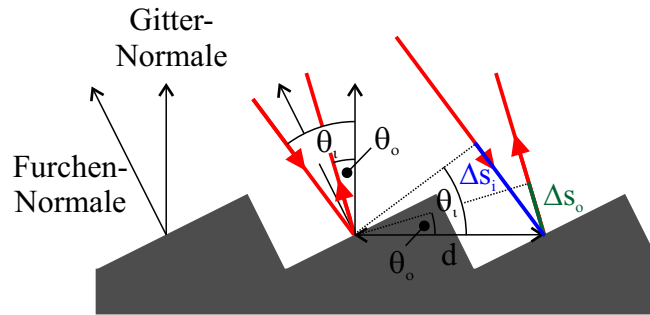


Abbildung 6.14: Reflexionsgitter bei schrägem Lichteinfall.

terschied

$$\Delta s = \Delta s_i + \Delta s_o = d \sin(\theta_i) + d \sin(\theta_o) \quad (6.2.36)$$

ein Vielfaches m der Wellenlänge λ ist.

Aus dieser Bedingung erhalten wir die Gittergleichung

$$d [\sin(\theta_i) + \sin(\theta_o)] = m\lambda. \quad (6.2.37)$$

In Abbildung 6.14 liegen der Einfallswinkel und der Reflexionswinkel auf derselben Seite der Gitternormalen. Ist dies nicht der Fall, weisen wir θ_o einen negativen Wert zu. Wir erhalten mit dieser Konvention dann wiederum die Gittergleichung (Beweis: Übung).

Gittermonochromatoren

Beugungsgitter werden als dispersierendes Element in Gittermonochromatoren verwendet. Die Funktionsweise eines sogenannten Czerny-Turner-Monochromators ist in Abbildung (6.15) schematisch dargestellt. Aufgrund der Beugung am Gitter werden die unterschiedlichen spektralen Komponenten des einfallenden Lichts auf verschiedene Positionen in der Ebene des Austrittsspalt abgebildet. Durch den Austrittsspalt wird dann ein Teil des Spektrums selektiert.

Das spektrale Auflösungsvermögen des Gitters ist definiert als

$$A = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_{\min}}, \quad (6.2.38)$$

wobei $\Delta\lambda_{\min}$ das minimale Wellenlängenintervall zweier spektraler Komponenten ist, die gerade noch aufgelöst werden können. Nach dem Rayleigh-Kriterium ist dies gerade noch

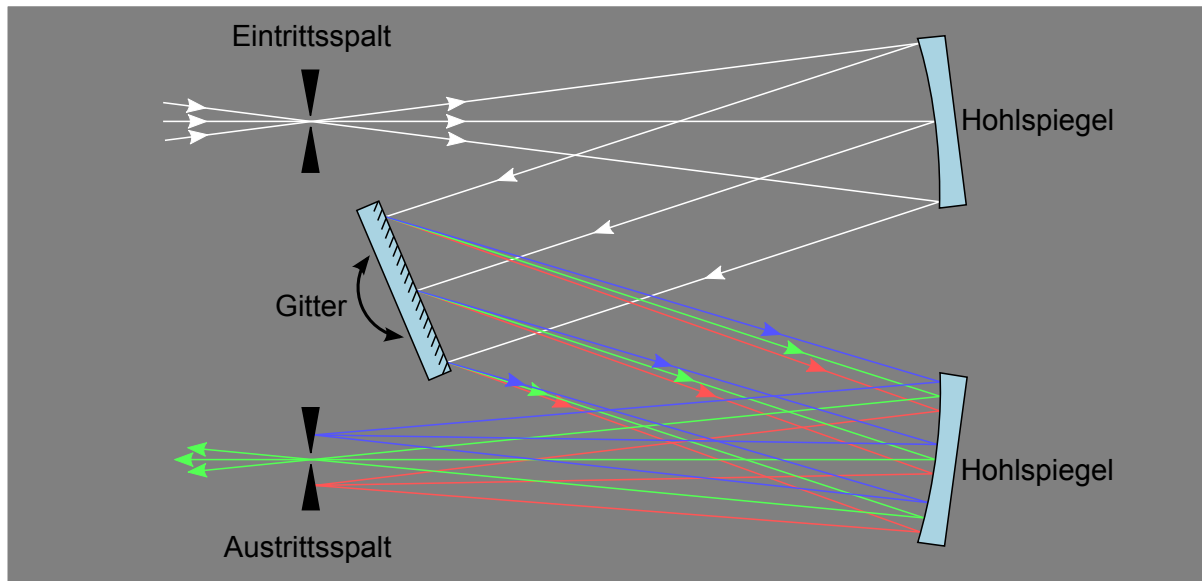


Abbildung 6.15: Czerny-Turner-Monochromator (Abbildung: Wikipedia, modifiziert).

der Fall, wenn das m -te Beugungsmaximum der Wellenlänge $\lambda + \Delta\lambda_{\min}$ mit dem ersten Minimum der gleichen Beugungsordnung für die Wellenlänge λ zusammenfällt. Für ein Gitter mit Linienzahl N findet man (Beweis: Übung):

$$A = mN. \quad (6.2.39)$$

6.3 Auflösungsvermögen eines Mikroskops

Das räumliche Auflösungsvermögen von optischen Instrumenten wird durch Beugung limitiert. Wir wollen diese Begrenzung exemplarisch für das Mikroskop diskutieren.

Ein Punkt P_1 in der Objektebene wird durch das Mikroskopobjektiv mit Durchmesser D und Brennweite f in die Zwischenbildebene abgebildet. Aufgrund von Beugung an der Fassung des Objektivs ist das Bild von P_1 ein Beugungsscheibchen mit Durchmesser d_{Beug} . Einsetzen von $\sin(\theta_{0,1}) = \frac{d_{\text{Beug}}}{2b}$ und $a = \frac{D}{2}$ in Gleichung (6.2.27) liefert:

$$d_{\text{Beug}} = 2.44\lambda \frac{b}{D} \quad (6.3.1)$$

Wir gehen im folgenden davon aus, dass verschiedene Punkte in der Objektebene als unabhängige Lichtquelle wirken, deren Beugungsbilder sich in der Zwischenbildebene inkohärent überlagern. Zwei benachbarte Punkte P_1 und P_2 erzeugen in einem Punkt der Zwischenbildebene also die Intensitätsverteilung

$$I(x) = I_1(x) + I_2(x). \quad (6.3.2)$$

6 Beugung

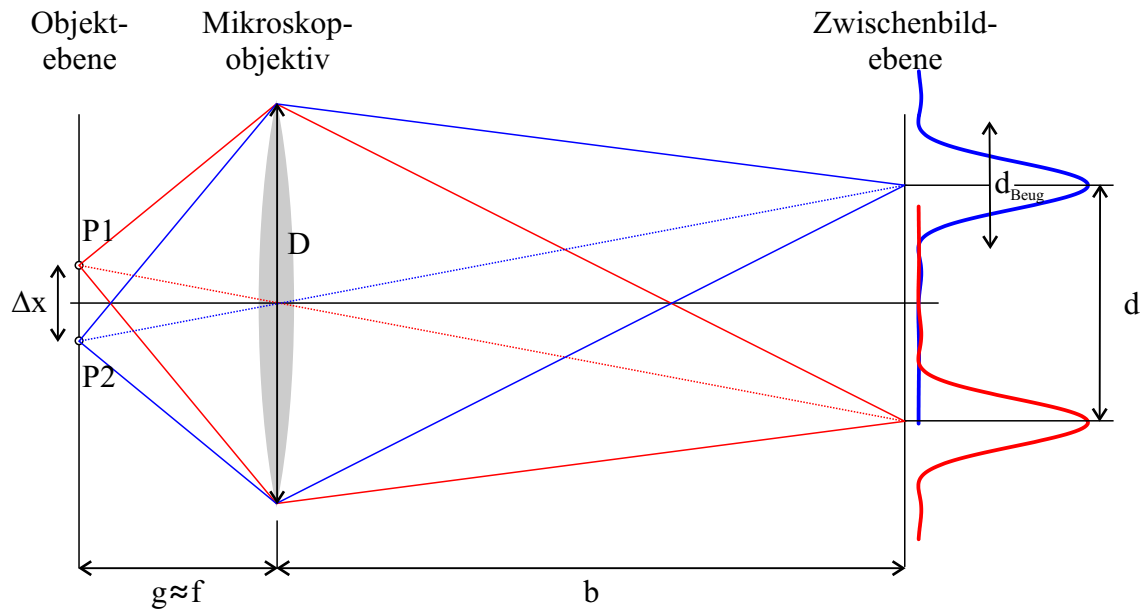


Abbildung 6.16: Auflösungsvermögen eines Mikroskops.

Hierbei sind I_1 und I_2 die Intensitätsverteilungen aufgrund von P_1 bzw. P_2 .

Nach dem Rayleigh-Kriterium sind die benachbarten Punkte noch räumlich getrennt beobachtbar, wenn der Abstand d der Maxima der Beugungsscheibchen in der Zwischenbildenebene mindestens so groß wie der halbe Durchmesser $\frac{1}{2}d_{\text{Beug}}$ eines Beugungsscheibchen ist.

Mit Hilfe der Abbildungsgleichung finden wir für den zugehörigen minimalen Objektabstand

$$\Delta x_{\min} = \frac{1}{2} d_{\text{Beug}} \frac{g}{b}. \quad (6.3.3)$$

Für ein Mikroskopobjektiv ist im Allgemeinen $b \gg f$, so dass $g \approx f$ gilt. Damit folgt

$$\Delta x_{\min} = 1,22 \lambda \frac{f}{D}. \quad (6.3.4)$$

Das Mikroskopobjektiv sammelt Licht aus dem vollen Öffnungswinkel 2α auf. Mit $g \approx f$ erhalten wir:

$$2 \sin(\alpha) = \frac{D}{f}. \quad (6.3.5)$$

6 Beugung

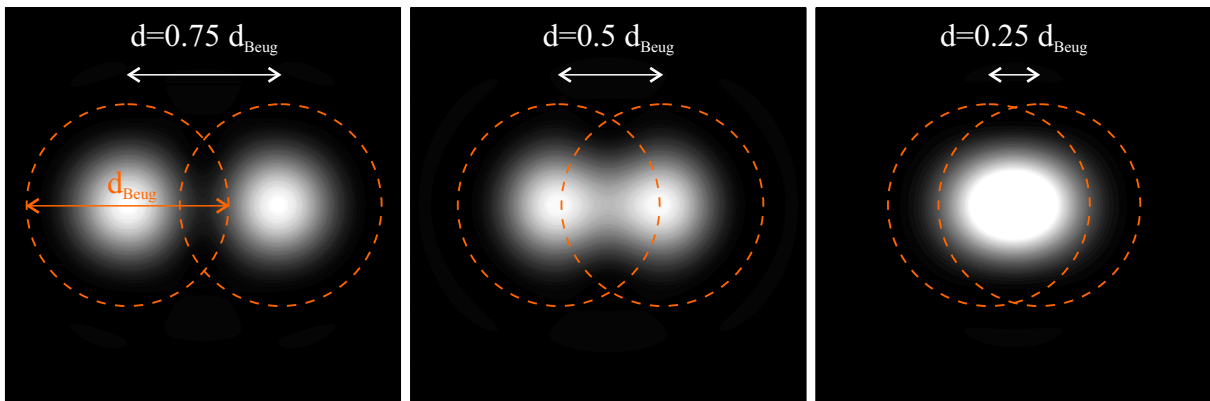


Abbildung 6.17: Berechnete Intensitätsverteilungen in der Zwischenbildebene für zwei Punktquellen in verschiedenen Abständen. Im mittleren Bild entspricht der Abstand dem Rayleigh-Kriterium.

Durch das Einbringen eines Immersionsöls mit Brechungsindex n_{im} zwischen Objekt und Mikroskopobjektiv kann die räumliche Auflösung verbessert werden:

$$\Delta x_{\text{min}} = 1,22 \frac{\lambda_0}{2n_{\text{im}} \sin(\alpha)}. \quad (6.3.6)$$

Die numerische Apertur

$$NA = n_{\text{im}} \sin(\alpha) \quad (6.3.7)$$

ist eine wichtige Kenngröße des Mikroskopobjektivs. Einsetzen in die obige Gleichung liefert:

$$\Delta x_{\text{min}} = 0,61 \frac{\lambda_0}{NA}. \quad (6.3.8)$$

Beispiel:

$$n_{\text{im}} = 1.5; \sin(\alpha) = 0.8 \text{ (d.h. } 2\alpha \approx 106^\circ)$$

$$\Rightarrow NA = 1.2 \Rightarrow \Delta x_{\text{min}} \approx 0.5\lambda_0.$$

7 Quanteneigenschaften von Licht

In den vorherigen Kapiteln haben wir Licht als klassische elektromagnetische Welle betrachtet. Wir wollen nun eine Reihe von optischen Phänomenen untersuchen, die sich nur verstehen lassen bzw. elegant interpretiert werden können, wenn wir das Lichtfeld quantisieren, d.h. nur bestimmte diskrete Energiewerte zulassen. Die kleinstmöglichen Energiequanten des elektromagnetischen Feldes mit einer bestimmten Frequenz bezeichnen wir als Photonen.

7.1 Schwarzkörperstrahlung

Der Ausgangspunkt für die Quantenrevolution am Anfang des 20. Jahrhunderts war die Untersuchung der Schwarzkörperstrahlung. Unter Letzterem versteht man das kontinuierliche Emissionsspektrum eines idealen schwarzen Körpers, der die einfallende Strahlung bei allen Frequenzen ν vollständig absorbiert (Absorptionsgrad $A(\nu) = 1$). Eine kleine Öffnung in einem Hohlraum stellt eine gute Approximation eines schwarzen Körpers dar.

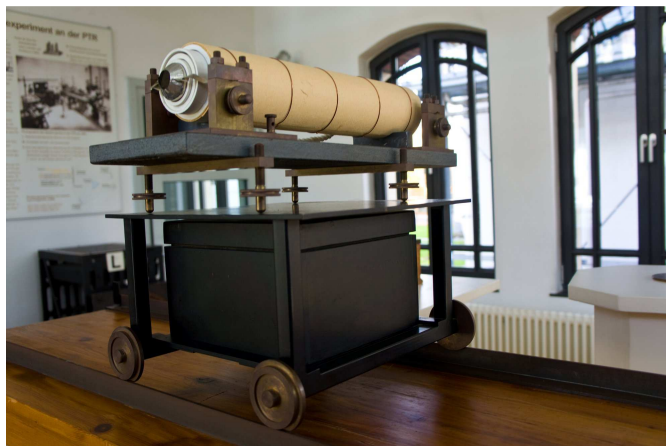


Abbildung 7.1: Hohlraumstrahler (Nachbau) bei der PTB.

Experiment: Hohlraumstrahler - Platinröhrchen.

7.1.1 Rayleigh-Jeans'sches Strahlungsgesetz

Im Folgenden wollen wir das von einem schwarzen Körper der Temperatur T emittierte Spektrum ermitteln. Dies werden wir zunächst im Rahmen eines klassischen Modells versuchen, in dem wir jeder Strahlungsmode im Gleichgewicht eine Energie von $k_B T$ zuordnen, wobei k_B die Boltzmann-Konstante ist. Wir werden sehen, dass sich hierbei drastische Abweichungen von den experimentellen Befunden ergeben.

Wir gehen von einem kubischen Hohlraum mit Seitenlänge l in einem Metallblock aus. Die elektromagnetischen Eigenschwingungen des Hohlraums, die sogenannten Moden, sind stehende Wellen, die an allen Wänden die folgende Randbedingung erfüllen:

$$\mathbf{e}_n \times \mathbf{E} = 0. \quad (7.1.1)$$

Hierbei ist \mathbf{e}_n der Normalenvektor zur jeweiligen Wand. Wir wählen den folgenden Ansatz für das elektrische Feld einer Mode:

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}s}(\mathbf{r}, t) = [E_{\mathbf{k}x} a_{sx}(\mathbf{k}) \hat{\mathbf{e}}_x + E_{\mathbf{k}y} a_{sy}(\mathbf{k}) \hat{\mathbf{e}}_y + E_{\mathbf{k}z} a_{sz}(\mathbf{k}) \hat{\mathbf{e}}_z] e^{-i\omega t} \quad (7.1.2)$$

mit

$$E_{\mathbf{k}x} = \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z), \quad (7.1.3)$$

$$E_{\mathbf{k}y} = \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z), \quad (7.1.4)$$

$$E_{\mathbf{k}z} = \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z). \quad (7.1.5)$$

Der Polarisationsvektor $\hat{\mathbf{a}}_s$ steht hierbei senkrecht auf dem Wellenvektor \mathbf{k} :

$$\hat{\mathbf{a}}_s \cdot \mathbf{k} = 0. \quad (7.1.6)$$

Aufgrund der Randbedingung gilt für den Wellenvektor \mathbf{k} der Mode:

$$\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z) = \left(\frac{\pi n_x}{l}, \frac{\pi n_y}{l}, \frac{\pi n_z}{l} \right), \quad (7.1.7)$$

wobei n_x , n_y und n_z positive ganze Zahlen sind (siehe Abbildung 7.2). Wir können somit jeder Mode im k -Raum ein Volumen von

$$(\Delta k)^3 = \left(\frac{\pi}{l} \right)^3. \quad (7.1.8)$$

zuordnen. Die zugehörigen Frequenzen sind gegeben durch:

$$\nu_{\mathbf{k}} = \frac{c|\mathbf{k}|}{2\pi} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{\pi n_x}{l} \right)^2 + \left(\frac{\pi n_y}{l} \right)^2 + \left(\frac{\pi n_z}{l} \right)^2}. \quad (7.1.9)$$

7 Quanteneigenschaften von Licht

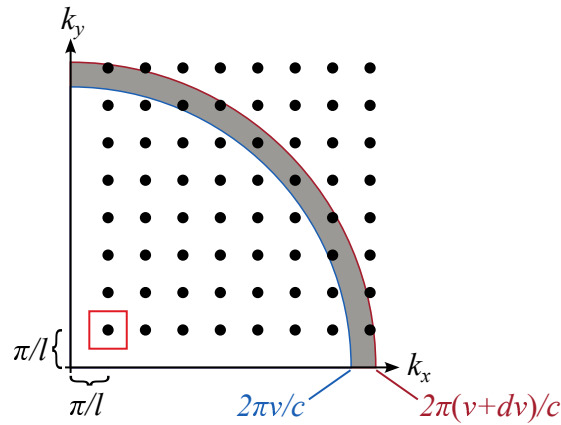


Abbildung 7.2: Die Wellenvektoren \mathbf{k} der Moden des Hohlraums können aufgrund der Randbedingung nur diskrete Werte annehmen.

Wir wollen nun die Anzahl der Moden $dN(\nu)$ mit einer Frequenz im Intervall $[\nu, \nu + d\nu]$ bestimmen. Hierzu summieren wir zunächst über alle erlaubten Wellenvektoren, deren Betrag im Intervall $[2\pi\nu/c, 2\pi(\nu + d\nu)/c]$ liegt:

$$dN(k) = 2 \sum_{|\mathbf{k}| \in [2\pi\nu/c, 2\pi(\nu+d\nu)/c]} . \quad (7.1.10)$$

Der Faktor 2 berücksichtigt die beiden zueinander orthogonalen Polarisationszustände pro Wellenvektor. Wir nehmen im Folgenden an, dass die Seitenlänge l des kubischen Hohlraums wesentlich größer als die Wellenlänge λ ist. In diesem Fall können wir die Summe durch ein Integral ersetzen:

$$dN(k) = 2 \sum_{|\mathbf{k}| \in [2\pi\nu/c, 2\pi(\nu+d\nu)/c]} = \frac{2}{(\Delta k)^3} \sum_{|\mathbf{k}| \in [2\pi\nu/c, 2\pi(\nu+d\nu)/c]} (\Delta k)^3 \rightarrow \frac{2}{(\Delta k)^3} \int_{2\pi\nu/c}^{2\pi(\nu+d\nu)/c} d\mathbf{k}. \quad (7.1.11)$$

Als nächstes führen wir die Integration in Kugelkoordinaten durch und erhalten

$$dN(k) = 2 \frac{l^3}{\pi^3} \frac{4\pi k^2 dk}{8}. \quad (7.1.12)$$

Hierbei berücksichtigt der Faktor $1/8$, dass nur Wellenvektoren mit positiven n_x , n_y und n_z erlaubt sind. Mit $\nu = (c/2\pi)k$ erhalten wir schließlich die elektromagnetische Zustandsdichte eines großen Hohlraums:

$$D_\gamma(\nu) = \frac{1}{V} \frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}. \quad (7.1.13)$$

Im Rayleigh-Jeans'schen Modell werden die elektromagnetischen Eigenschwingungen des Hohlraums wie klassische harmonische Oszillatoren behandelt, denen im thermischen

Gleichgewicht die mittlere Energie $\overline{W}(\nu, T) = k_B T$ zugeordnet wird. Die Energiedichte der Hohlraumstrahlung im Frequenzbereich zwischen ν und $\nu + d\nu$ ist damit:

$$u(\nu, T)d\nu = D_\gamma(\nu)\overline{W}(\nu, T)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}k_B T d\nu. \quad (7.1.14)$$

Nach diesem Rayleigh-Jeans'schen Strahlungsgesetz sollte die Energiedichte quadratisch mit der Frequenz ν anwachsen, d.h., die integrierte Energiedichte würde divergieren. Diese unphysikalische Vorhersage ist eine Folge der klassischen Herleitung und wird als Ultraviolett-Katastrophe bezeichnet.

7.1.2 Plancksches Strahlungsgesetz

Im Planckschen Modell der Schwarzkörperstrahlung wird nun angenommen, dass die Energie einer Mode nur um Vielfaches des Energiequantums $h\nu$ ansteigen kann. Hierbei ist ν die Frequenz der Mode und $h = 6.6260693 \cdot 10^{-34}$ Js das sogenannte Planksche Wirkungsquantum. Diese Annahme kann im Rahmen der klassischen Elektrodynamik nicht begründet werden, da letztere ja eine beliebige Energie pro Mode zulässt. Die kleinstmöglichen Energiequanten $h\nu$ der Moden des elektromagnetischen Feldes heißen Photonen. Eine Mode der Frequenz ν mit n Photonen besitzt somit die Energie

$$W_\nu = nh\nu. \quad (7.1.15)$$

Im thermischen Gleichgewicht ist die Wahrscheinlichkeit $p(W)$, dass eine Mode mit n Photonen besetzt ist, gegeben durch

$$p(W) = \frac{e^{-nh\nu/(k_B T)}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nh\nu/(k_B T)}}. \quad (7.1.16)$$

Aus der Normierung der Wahrscheinlichkeiten folgt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(nh\nu) = 1. \quad (7.1.17)$$

Die mittlere Energie pro Mode ist gegeben durch:

$$\overline{W}(\nu, T) = \sum_{n=0}^{\infty} p(nh\nu) n h\nu = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n h\nu e^{-nh\nu/(k_B T)}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nh\nu/(k_B T)}}. \quad (7.1.18)$$

Wir betrachten zunächst den Zähler von Gleichung (7.1.18). Mit der Abkürzung $\beta = 1/(k_B T)$ finden wir

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n h\nu e^{-nh\nu\beta} &= -\frac{\partial}{\partial\beta} \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nh\nu\beta} \right) = -\frac{\partial}{\partial\beta} \left(\frac{1}{1 - e^{-h\nu\beta}} \right) \\ &= \frac{h\nu e^{-h\nu\beta}}{(1 - e^{-h\nu\beta})^2}. \end{aligned} \quad (7.1.19)$$

7 Quanteneigenschaften von Licht

Für den Nenner von Gleichung (7.1.18) ergibt sich:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nh\nu\beta} = \frac{1}{1 - e^{-h\nu\beta}}. \quad (7.1.20)$$

Durch Einsetzen erhalten wir schließlich die mittlere Energie pro Eigenschwingung:

$$\overline{W}(\nu, T) = \frac{h\nu}{e^{h\nu/(k_B T)} - 1}. \quad (7.1.21)$$

Mit

$$u(\nu, T)d\nu = D_\gamma(\nu)\overline{W}(\nu, T)d\nu \quad (7.1.22)$$

ergibt sich das Plancksche Strahlungsgesetz:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \quad (7.1.23)$$

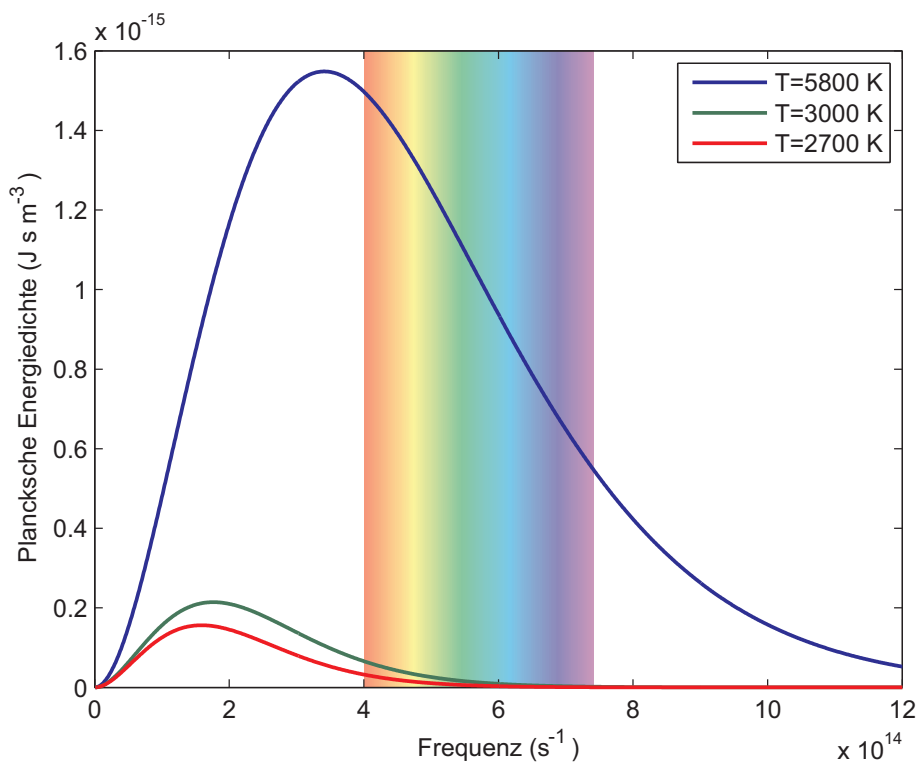


Abbildung 7.3: Graphische Darstellung des Planckschen Strahlungsgesetzes für drei verschiedene Schwarzkörpertemperaturen.

Die Photonenergie $h\nu_m$ der maximalen Energiedichte ist durch das Wiensche Verschiebungsgesetz gegeben:

$$h\nu_m = 2.82k_B T. \quad (7.1.24)$$

7.1.3 Lambert-Strahler und Stefan-Boltzmann-Gesetz

Experiment: Hohlraumstrahler - Stefan-Boltzmann'sche Strahlungsformel.

Die Strahlung im Hohlraum ist isotrop. Somit ist die Energiestromdichte pro Raumwinkel $d\Omega$ und Frequenzintervall $d\nu$ gegeben durch:

$$\mathbf{j}_{d\Omega}(\nu, T) = \frac{c \mathbf{e}_k}{4\pi} u(\nu, T) \quad (7.1.25)$$

Die Leistung, die im Frequenzintervall $[\nu, \nu + d\nu]$ durch ein Flächenelement $d\mathbf{A} = \mathbf{e}_A dA$ der Öffnung des Hohlraumstrahlers in den Raumwinkel $d\Omega$ abgestrahlt wird, berechnet sich daher zu:

$$dP_{d\Omega}(\nu, T) = \mathbf{j}_{d\Omega}(\nu, T) \cdot \mathbf{e}_A dA d\Omega d\nu = j_{d\Omega}(\nu, T) \cos(\theta) dA d\Omega d\nu. \quad (7.1.26)$$

Hierbei ist θ der Winkel zwischen der Flächennormalen \mathbf{e}_A und der Ausbreitungsrichtung der Strahlung \mathbf{e}_k . Die Öffnung zeigt die Charakteristik eines Lambert-Strahlers:

$$dP_{d\Omega}(\nu, T) = dP_{d\Omega}^{\theta=0}(\nu, T) \cos(\theta), \quad (7.1.27)$$

wobei $dP_{d\Omega}^{\theta=0}(\nu, T)$ die in Vorwärtsrichtung ($\theta = 0$) emittierte Leistung ist.

Wir integrieren nun die Energiedichte der Hohlraumstrahlung über alle Frequenzen:

$$U(T) = \int_0^\infty u(\nu, T) d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} d\nu. \quad (7.1.28)$$

Mit der Substitution $x = \frac{h\nu}{k_B T}$ kann das Integral umgeformt werden zu:

$$\left(\frac{k_B T}{h}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \left(\frac{k_B T}{h}\right)^4 \frac{\pi^4}{15}. \quad (7.1.29)$$

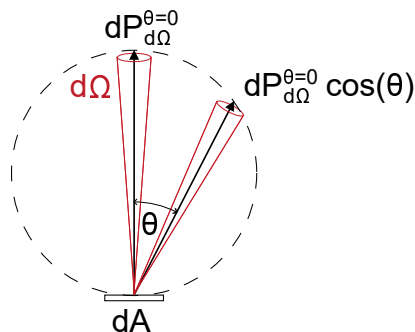


Abbildung 7.4: Winkelabhängigkeit der abgestrahlten Leistung bei einem Lambert-Strahler.

Für die integrierte Energiedichte finden wir:

$$U(T) = aT^4 \quad (7.1.30)$$

mit

$$a = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^3}. \quad (7.1.31)$$

Somit wird die Gesamtleistung

$$dP_{d\Omega}(T) = \frac{c \mathbf{e}_k}{4\pi} U(T) \cdot \mathbf{e}_A dA d\Omega = \frac{c}{4\pi} \cos(\theta) aT^4 dAd\Omega. \quad (7.1.32)$$

durch das Flächenelement dA der Öffnung in den Raumwinkel $d\Omega$ abgestrahlt. Abschließend integrieren wir nun noch über den Halbraum und die Öffnung (Gesamtfläche A):

$$\begin{aligned} P(T) &= \int \int \frac{c}{4\pi} \cos(\theta) aT^4 dAd\Omega \\ &= A \frac{c}{4\pi} aT^4 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta d\varphi \\ &= A \frac{c}{4\pi} aT^4 2\pi. \end{aligned} \quad (7.1.33)$$

Durch Zusammenfassen der Konstanten erhalten wir die Stefan-Boltzmann'sche Strahlungsformel:

$$\boxed{P(T) = A\sigma T^4} \quad (7.1.34)$$

mit der Stefan-Boltzmann-Konstante

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3} = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}. \quad (7.1.35)$$

7.2 Emission und Absorption elektromagnetischer Strahlung

Wir untersuchen nun die elementaren Wechselwirkungsprozesse zwischen einem Ensemble von Atomen und Licht. Dabei wollen wir annehmen, dass die Strahlung resonant zu einem Übergang zwischen zwei Energieniveaus E_1 und E_2 eines Atoms ist. Die Photonenenergie ist somit $h\nu_0 = E_2 - E_1$. Wir nehmen an, dass das Strahlungsfeld nicht an weitere Energieniveaus des Atoms koppelt, so dass wir jedes Atom als Zweiniveau-System nähern können.

7.2.1 Linienformfunktion

Experimentell beobachtet man, dass atomare Emissions- und Absorptionsspektren keine δ -Funktionen sind sondern in einem Frequenzintervall $\Delta\nu$ um die Übergangsfrequenz ν_0 herum verschmiert sind. Diese spektrale Verbreiterung ist eine Folge der endlichen Lebenszeiten der Energieniveaus. Um diesen Umstand Rechnung zu tragen führen wir die normierte Linienformfunktion $g(\nu)$ ein:

$$\int_0^{\infty} g(\nu) d\nu = 1 \quad (7.2.1)$$

mit

$$g(\nu_0) = g_{\max}; g(\nu_0 \pm \Delta\nu/2) = \frac{1}{2}g_{\max}. \quad (7.2.2)$$

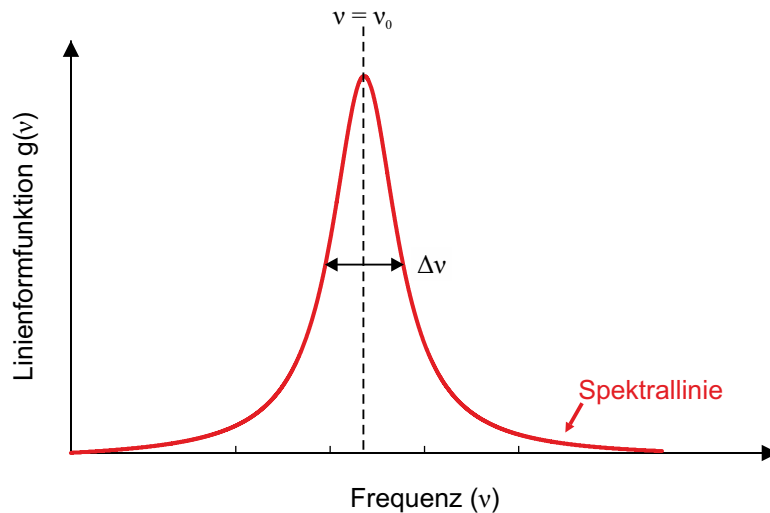


Abbildung 7.5: Schematische Darstellung der Linienformfunktion $g(\nu)$.

7.2.2 Übergangsraten

Wir wollen nun die Änderung der Besetzungszahldichten N_1 und N_2 der beiden atomaren Energieniveaus E_1 bzw. E_2 im Ensemble aufgrund der Wechselwirkung der Zweiniveausysteme mit dem Lichtfeld untersuchen.

Absorptionsrate

Ist ein Atom ursprünglich im unteren Energieniveau E_1 , so kann es durch Absorption eines Photons aus dem Strahlungsfeld in das obere Energieniveau E_2 angeregt werden.

7 Quanteneigenschaften von Licht

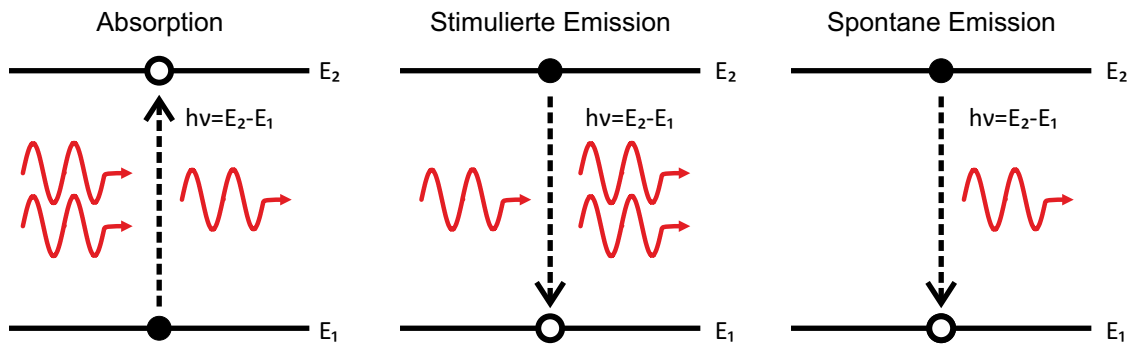


Abbildung 7.6: Elementare Wechselwirkungsprozesse zwischen einem Zweiniveausystem und einem Strahlungsfeld.

Die Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit für einen Übergang des Atoms von E_1 nach E_2 durch Absorption eines Photons mit einer Frequenz zwischen ν und $\nu + d\nu$ beträgt

$$W_{12}(\nu)d\nu = B_{12}u(\nu)g(\nu)d\nu. \quad (7.2.3)$$

Hierbei ist $u(\nu)$ die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes und B_{12} eine Konstante. Die Teilchenzahldichte N_1 des Ensembles ändert sich damit mit der Rate

$$\frac{dN_1}{dt} = -N_1W_{12}(\nu)d\nu = -N_1B_{12}u(\nu)g(\nu)d\nu. \quad (7.2.4)$$

Rate der stimulierten Emission

Der Übergang eines Atoms vom oberen Energieniveau E_2 in das untere Energieniveau E_1 kann durch ein Photon des Strahlungsfeldes stimuliert werden. Bei dieser stimulierten Emission genannten Prozess wird die Energie in Form eines Photons freigesetzt, das dieselben Eigenschaften (Frequenz, Polarisation, Wellenvektor) wie das stimulierende Photon besitzt. Die Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit für einen Übergang von E_2 nach E_1 durch stimulierte Emission eines Photons mit einer Frequenz zwischen ν und $\nu + d\nu$ ist gegeben durch:

$$W_{21}(\nu)d\nu = B_{21}u(\nu)g(\nu)d\nu. \quad (7.2.5)$$

Hierbei ist B_{21} eine Konstante. Die Änderung der Teilchenzahldichte N_2 durch stimulierte Emission lautet damit

$$\frac{dN_2}{dt} = -N_2W_{21}(\nu)d\nu = -N_2B_{21}u(\nu)g(\nu)d\nu. \quad (7.2.6)$$

Rate der spontanen Emission

Ein angeregtes Atom kann auch durch spontane Emission eines Photons aus dem angeregten Zustand in das untere Energieniveau übergehen. Die zugehörige Wahrscheinlichkeit

7 Quanteneigenschaften von Licht

pro Zeiteinheit für die spontane Emission eines Photons mit einer Frequenz zwischen ν und $\nu + d\nu$ ist gegeben durch

$$W_{\text{sp}}(\nu) d\nu = A_{21} g(\nu) d\nu, \quad (7.2.7)$$

wobei A_{21} eine Konstante ist. Die Teilchenzahldichte N_2 ändert sich durch spontane Emission von Photonen mit einer Frequenz zwischen ν und $\nu + d\nu$ mit der Rate

$$\frac{dN_2}{dt} = -N_2 W_{\text{sp}}(\nu) d\nu = -N_2 A_{21} g(\nu) d\nu. \quad (7.2.8)$$

Die gesamte Rate der spontanen Emission berechnet sich zu

$$W_{\text{sp}} = \int_0^\infty W_{\text{sp}}(\nu) d\nu = A_{21}. \quad (7.2.9)$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass der Koeffizient $A_{21} = 1/\tau_{\text{sp}}$ der reziproken Lebensdauer des angeregten Zustands ohne äußeres Feld ($u(\nu) = 0$) entspricht:

$$\frac{dN_2}{dt} = -N_2 W_{\text{sp}} = -N_2 A_{21} \Rightarrow N_2(t) = N_2(t=0) e^{-A_{21}t} = N_2(t=0) e^{-t/\tau_{\text{sp}}}. \quad (7.2.10)$$

Einsteinkoeffizienten

Die drei Konstanten A_{21} , B_{12} und B_{21} werden in der Literatur als Einsteinkoeffizienten bezeichnet. Um einen Zusammenhang zwischen den drei Einsteinkoeffizienten zu ermitteln, betrachten wir das System (atomares Ensemble und Strahlungsfeld) im thermischen Gleichgewicht. Die Energiedichte des elektromagnetischen Strahlungsfeldes ist in diesem Fall durch das Plancksche Strahlungsgesetz (7.1.23) bestimmt:

$$u(\nu) = \frac{8\pi}{c^3} \frac{h\nu^3}{\exp(h\nu/k_B T) - 1}. \quad (7.2.11)$$

Die Besetzungsdichten der Energieniveaus ist durch die Boltzmann-Verteilung gegeben:

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{E_2 - E_1}{k_B T}}. \quad (7.2.12)$$

Nach dem Prinzip des detaillierten Gleichgewichts müssen sich in jedem Frequenzintervall $[\nu, \nu + d\nu]$ die Übergangsraten aufgrund von Absorption und Emission ausgleichen:

$$N_2 [W_{21}(\nu) + W_{\text{sp}}(\nu)] = N_1 W_{12}(\nu). \quad (7.2.13)$$

Somit muss die folgende Gleichung für alle Temperaturen erfüllt sein:

$$N_2 A_{21} = N_2 \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \left(B_{12} e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - B_{21} \right). \quad (7.2.14)$$

Die drei Einsteinkoeffizienten sind daher nicht unabhängig voneinander, sondern erfüllen die folgenden Relationen:

$$B_{12} = B_{21} \tag{7.2.15}$$

und

$$A_{21} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} B_{21}. \tag{7.2.16}$$

Da die Emissions- und Absorptionseigenschaften der Atome nicht vom thermischen Zustand des Ensembles abhängen, gelten diese Beziehungen allgemein, d.h. auch für Nichtgleichgewichts-Zustände. Allerdings spiegeln die Einsteinkoeffizienten nicht nur eine rein intrinsische Eigenschaft der Atome wider, sondern werden aufgrund der photonischen Zustandsdichte auch durch die Umgebung beeinflusst. Beispielsweise kann die spontane Emissionsrate verändert werden indem man die Atome in einen Resonator einbringt (Purcell-Effekt).

7.3 Light amplification by stimulated emission of radiation: **Laser**

7.3.1 Kleinsignalverstärkung in einem Lasermedium

In diesem Abschnitt wollen wir untersuchen, unter welchen Umständen eine elektromagnetische Welle in einem Laser-Medium kohärent verstärkt werden kann. Sowohl stimulierte Emission als auch spontane Emission führen zu einer Zunahme der Photonenzahl. Für einen Laser ist allerdings nur die stimulierte Emission erwünscht, da sie zu einer kohärenten Verstärkung des Lichtfeldes führt während die spontane Emission unerwünschtes Rauschen verursacht. In der folgenden Diskussion vernachlässigen wir die spontane Emission.

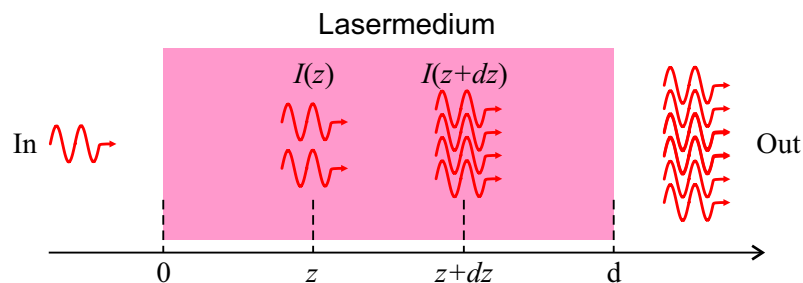


Abbildung 7.7: Verstärkung einer Lichtwelle in einem Lasermedium.

7 Quanteneigenschaften von Licht

Wir betrachten eine monochromatische Welle mit der Frequenz ν , die an der Position z im Lasermedium die Intensität

$$I(z) = cu(z, \nu) = ch\nu n_\gamma(z) \quad (7.3.1)$$

aufweist. Hierbei bezeichnet $n_\gamma(z)$ die zugehörige Photonendichte. Die Intensitätsänderung nach der Propagation im Lasermedium um die Strecke dz ist gegeben durch

$$\begin{aligned} dI &= I(z + dz) - I(z) = \frac{dI}{dz} dz = \frac{dI}{dt} \frac{dt}{dz} dz \\ &= ch\nu \frac{dn_\gamma}{dt} \frac{1}{c} dz = h\nu (N_2 W_{21} - N_1 W_{12}) dz. \end{aligned} \quad (7.3.2)$$

Hierbei beschreibt der erste Term auf der rechten Seite die Zunahme der Photonendichte pro Zeiteinheit durch stimulierte Emission im Bereich zwischen z und $z + dz$ während der zweite Term die entsprechenden Absorptionsverluste berücksichtigt. Die letzte Gleichung können wir mit

$$W_{21} = W_{12} = \frac{c^3 g(\nu) u(z, \nu)}{8\pi h\nu^3 \tau_{sp}} = \frac{c^2 g(\nu) I(z)}{8\pi h\nu^3 \tau_{sp}} \quad (7.3.3)$$

umschreiben zu

$$\frac{dI}{dz} = [N_2 - N_1] \frac{c^2}{8\pi\nu^2 \tau_{sp}} g(\nu) I(z) = \gamma(\nu) I(z). \quad (7.3.4)$$

Hier haben wir im letzten Schritt den Kleinsignalverstärkungskoeffizienten

$$\gamma(\nu) = [N_2 - N_1] \frac{c^2}{8\pi\nu^2 \tau_{sp}} g(\nu) \quad (7.3.5)$$

eingeführt. Durch Integration von Gleichung (7.3.4) erhalten wir:

$$I(z) = I(0) e^{\gamma(\nu)z}, \quad (7.3.6)$$

wobei $I(0)$ die Intensität am Eingang des Lasermediums ist. Offensichtlich wird die Welle verstärkt, falls $\gamma(\nu)$ positiv ist. Dies erfordert eine Besetzungsinversion, d.h., $N_2 > N_1$.

7.3.2 Laserschwelle

Bei einem Laser befindet sich das Lasermedium typischerweise in einem optischen Resonator. Letzterer dient zur Frequenzselektion und zur kohärenten Rückkopplung der Lichtwelle in das Lasermedium. Wir nehmen im Folgenden an, dass die Resonantormoden viel schärfer sind als die Spektrallinie des Lasermediums ($\delta\nu_R \ll \Delta\nu$). Für die Resonator-Mode mit Resonanzfrequenz ν_R nähern wir $u(\nu)d\nu = u(\nu_R)\delta\nu_R = h\nu_R n_\gamma(\nu_R)$.

Als einfaches Modell eines Lasers betrachten wir einen Fabry-Perot-Resonator der Länge L , der vollständig mit einem Lasermedium gefüllt ist (siehe Abbildung 7.8). Die Reflexionsgrade der beiden Spiegel seien R_1 und R_2 . Wir nehmen an, dass eine einzelne Resonatormode mit Frequenz ν_R verstärkt wird¹. Die Verluste im Lasermedium durch

¹In einem Laser gilt üblicherweise: The winner takes it all!

7 Quanteneigenschaften von Licht

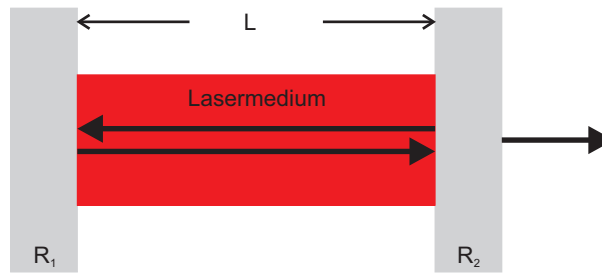


Abbildung 7.8: Lasermedium in Fabry-Perot-Resonator.

Streuung oder Absorption aufgrund von Verunreinigungen beschreiben wir durch eine Verlustkonstante $\alpha(\nu_R)$. Damit gilt:

$$I_{\nu_R}(z) = I_{\nu_R}(0) e^{(\gamma(\nu) - \alpha(\nu))z}. \quad (7.3.7)$$

Nach einem kompletten Umlauf ist die Intensität gegeben durch:

$$I_{\nu_R}(2L) = I_{\nu_R}(0) R_1 R_2 e^{(\gamma(\nu_R) - \alpha(\nu_R))2L}. \quad (7.3.8)$$

Im Laserbetrieb muss die Verstärkung mindestens die während eines Umlaufs auftretenden Verluste ausgleichen. Somit gilt die folgende Schwellenbedingung für den Laserbetrieb:

$$I_{\nu_R}(2L) = I_{\nu_R}(0). \quad (7.3.9)$$

Um die zugehörige Schwellenverstärkung

$$\gamma_{\text{thr}}(\nu_R) = \alpha(\nu_R) - \frac{1}{2L} \ln(R_1 R_2) \quad (7.3.10)$$

zu erreichen, muss die Besetzungsinversion mindestens den folgenden Wert aufweisen:

$$\sigma_{\text{thr}} = \frac{8\pi\nu^2\tau_{sp}}{c^2g(\nu_R)} \left(\alpha(\nu_R) - \frac{1}{2L} \ln(R_1 R_2) \right) \quad (7.3.11)$$

7.3.3 Erzeugung der Besetzungsinversion

Eine Besetzungsinversion zwischen dem oberen Laser-Niveau $|2\rangle$ und dem unterem Laser-Niveau $|1\rangle$ kann mit einem 2-Niveau-System nicht kontinuierlich erreicht werden. Daher werden für den Laserbetrieb noch weitere Energieniveaus benötigt. Wir betrachten im Folgenden die Erzeugung der Besetzungsinversion in einem 3-Niveau und einem 4-Niveau-Laser:

- Durch Energiezufuhr wird ein Teil der Atome aus dem Grundzustand $|0\rangle$ bzw. $|1\rangle$ in das Pump-Niveau $|3\rangle$ angeregt.
- Schneller Übergang in das langlebige obere Laserniveau $|2\rangle$.

7 Quanteneigenschaften von Licht

- Laserübergang zwischen dem oberen Laser-Niveau $|2\rangle$ und dem unteren Laser-Niveau $|1\rangle$.
- 4-Niveau Laser: schneller Übergang aus dem unteren Laserniveau $|1\rangle$ in den Grundzustand $|0\rangle$.

Der 4-Niveau Laser bietet den Vorteil, dass die Besetzungsinversion zwischen den Laser-Niveaus $|2\rangle$ und $|1\rangle$ selbst für fast vollständige Besetzung des Grundzustands $|0\rangle$ möglich ist. Daher wird im Vergleich zu einem 3-Niveau Laser typischerweise eine geringe Pumpleistung benötigt.

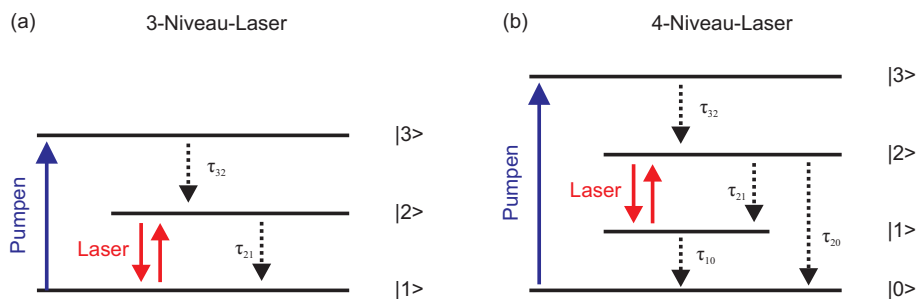


Abbildung 7.9: Energieniveaus und Raten für (a) idealen 3-Niveau-Laser und (b) idealen 4-Niveau-Laser.

Beispiele:

- 3-Niveau-Laser: Rubin-Laser, erste Demonstration eines Lasers; T. H. Maiman, *Nature* **187**, 493 (1960).
- 4-Niveau-Laser: Helium-Neon Laser; A. Javan *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **6**, 106 (1961).

7.3.4 Beispiel: Helium-Neon-Laser

Der Helium-Neon (HeNe) Laser ist ein 4-Niveau Gaslaser, der Helium als Pumpgas und Neon als Lasermedium verwendet. Der Druck in der Laserröhre beträgt typischerweise 100 Pa mit einem Verhältnis der Partialdrücke von Helium/Neon von ca. 5/1. Im Gasgemisch wird durch das Anlegen einer Spannung eine Gasentladung erzeugt. Hierbei werden metastabile Helium-Zustände durch Elektronenstöße angeregt. Die Energie wird auf angeregte Neon-Zustände durch Stöße 2. Art übertragen, bei denen die Helium-Atome wieder in den Grundzustand zurückkehren. Technisch ist vor allem die Laserlinie bei $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ von Bedeutung. Er wird heute noch für Interferometer und als Justage-Laser verwendet.

7 Quanteneigenschaften von Licht

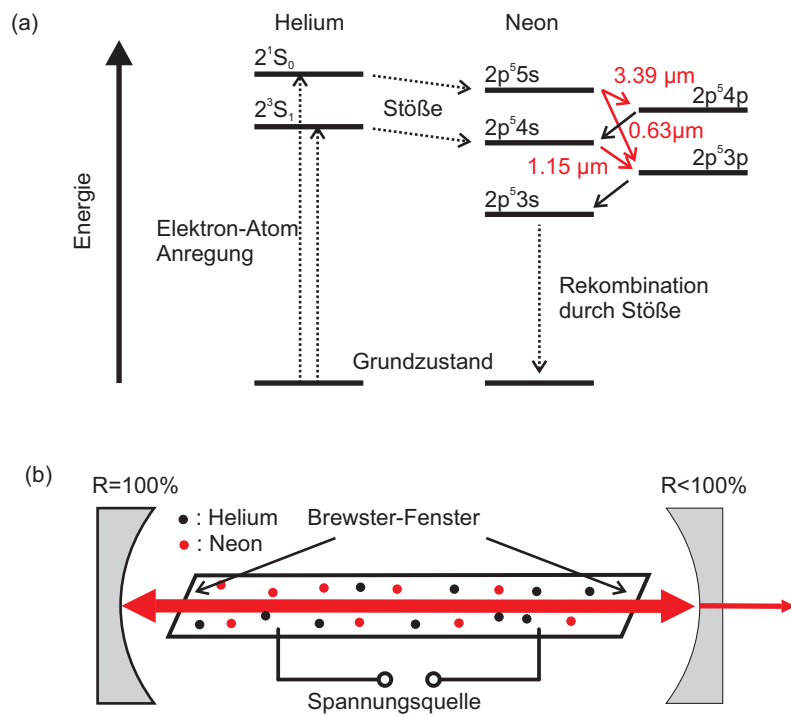


Abbildung 7.10: (a) Schematische Darstellung der Anregungs- und Rekombinationsprozesse beim HeNe-Laser (b) Schematische Darstellung eines HeNe-Lasers.

7.4 Äußerer Photoeffekt

Experiment: Äußerer Photoeffekt.

Durch Bestrahlung mit kurzwelligem Licht können Elektronen aus einem Halbleiter oder einem Metall herausgelöst werden. Dieses Phänomen wird äußerer Photoeffekt oder Hallwachs-Effekt genannt.

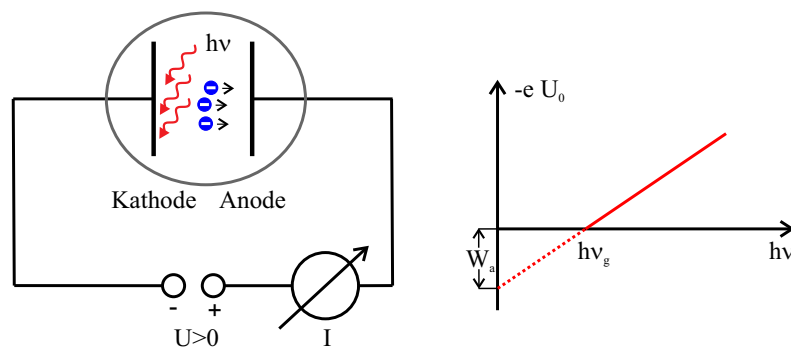


Abbildung 7.11: Experiment zum Nachweis des äußeren Photoeffekts.

Der in Abbildung 7.11 schematisch dargestellte experimentelle Aufbau eignet sich für eine quantitative Untersuchung des Effekts. Die beleuchtete Kathode befindet sich zusammen

mit der unbeleuchteten Anode in einem evakuierten Glasgefäß. Zwischen den Elektroden wird eine Spannung U angelegt und der Strom I als Funktion der Frequenz ν und der Leistung P des eingestrahlt Lichts gemessen. Die maximale kinetische Energie der Elektronen $E_{\text{kin}}^{\text{max}}$ kann durch das Anlegen einer negativen Spannung bestimmt werden. Ist $U_0 < 0$ die Spannung, bei der der Photostrom einsetzt, so gilt:

$$E_{\text{kin}}^{\text{max}} = -eU_0. \quad (7.4.1)$$

Im Experiment können folgende Zusammenhänge beobachtet werden:

- Um Elektronen aus der Kathode herauszulösen muss das eingestrahlte Licht eine Frequenz besitzen, die größer als eine materialspezifische Grenzfrequenz ν_g ist.
- Die maximale kinetische Energie der Photoelektronen $E_{\text{kin}}^{\text{max}}$ hängt nur von der Lichtfrequenz ν ab, nicht aber von der Lichtleistung P . Experimentell findet man: $E_{\text{kin}}^{\text{max}} \propto \nu$.
- Zwischen Lichteinfall und Elektronenemission gibt es keine messbare zeitliche Verzögerung.
- Die Zahl der Photoelektronen ist proportional zur Lichtleistung.

Mit Ausnahme der letzten Beobachtung sind die Befunde im Widerspruch zur klassischen Elektrodynamik. Albert Einstein lieferte 1905 eine Erklärung auf der Basis der Lichtquanten. Hiernach gibt ein absorbiertes Photon seine gesamte Energie $h\nu$ an ein Elektron ab. Für die maximale kinetische Energie des freigesetzten Elektrons gilt dann

$$E_{\text{kin}}^{\text{max}} = h\nu - W_a. \quad (7.4.2)$$

Hierbei ist W_a die sogenannte Austrittsarbeit, die die Bindung des Elektrons im Kathodenmaterial charakterisiert. Mit Gleichung (7.4.1) folgt:

$$-eU_0 = h\nu - W_a. \quad (7.4.3)$$

Der äußere Photoeffekt ermöglicht also eine experimentelle Bestimmung des Planckschen Wirkungsquantums, indem wir die Steigung der Gerade $U_0(\nu)$ bestimmen. Aus dem Achsenabschnitt folgt die Austrittsarbeit W_a .

Der äußere Photoeffekt wird zum Nachweis von Photonen mit einem Photoelektronenvervielfacher (engl. Photomultiplier Tube, PMT) verwendet.

Experiment: PMT.

7.5 Nachweis einzelner Photonen mit einem HBT-Experiment

Nach unseren Überlegungen in Abschnitt 7.2.2 sollte ein einzelnes Atom als Einzelphotonen-Quelle fungieren, das bei jedem spontanen Emissions-Prozess ein ein-

7 Quanteneigenschaften von Licht

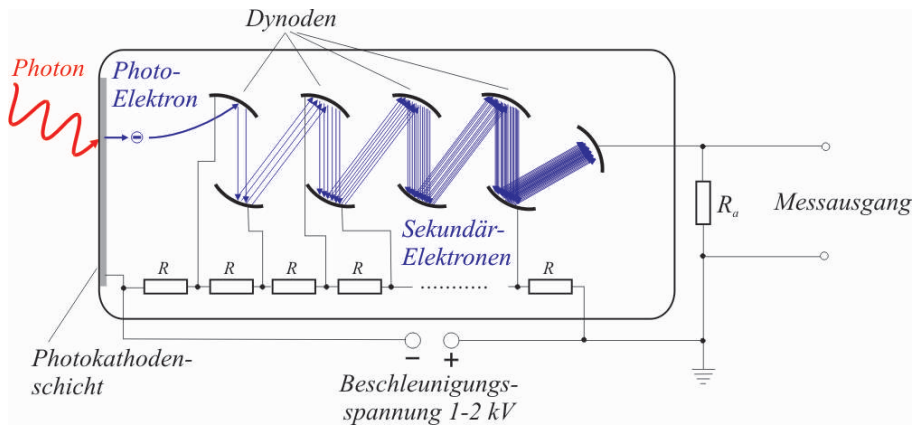


Abbildung 7.12: Schematischer Aufbau eines Photomultipliers (Quelle: Wikipedia).

zernes Photon erzeugt. Wir wollen uns jetzt der Frage widmen, wie man experimentell nachweisen kann, dass eine Lichtquelle tatsächlich einzelne Photonen aussendet.

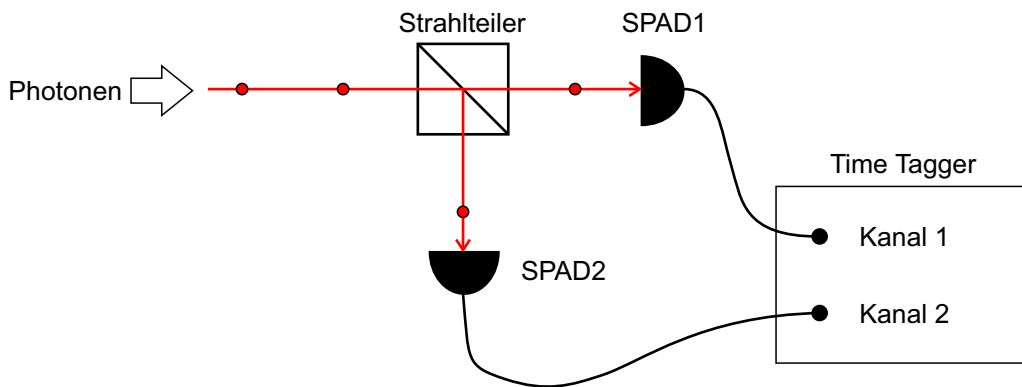


Abbildung 7.13: Schematischer Aufbau eines HBT-Experiments.

Experiment: HBT-Experiment mit einer Photonen-Paar Quelle.

Abbildung 7.13 zeigt den schematischen Aufbau eines sogenannten HBT-Experiments². Der einfallende Photonenstrom wird mit einem 50:50-Strahlteiler aufgeteilt. Die beiden Anteile werden anschließend jeweils auf einen sensitiven Photodetektor, z.B. ein PMT oder eine Einzelphotonen-Avalanche-Photodiode (SPAD), gelenkt. Die Photodetektoren werden im sogenannten Geiger-Modus betrieben, d.h., der Nachweis eines Photons erzeugt ein kurzes elektrisches Signal ("Klick"). Eine Time-Tagger-Elektronik registriert dann den Kanal und den genauen Zeitpunkt eines jeden "Klicks".

²Das HBT-Experiment ist nach Robert Hanbury Brown and Richard Q. Twiss benannt.

Nach der Messung wird aus den Daten des Time-Taggers die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung bestimmt:

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle n_1(t)n_2(t + \tau) \rangle}{\langle n_1(t) \rangle \langle n_2(t + \tau) \rangle}. \quad (7.5.1)$$

Hierbei bezeichnet $\langle n_1(t)n_2(t + \tau) \rangle$ die Anzahl der Koinzidenzen, bei denen die beiden Detektoren mit einer Zeitverzögerung τ jeweils ein Photon registrieren. $\langle n_1(t) \rangle$ und $\langle n_2(t + \tau) \rangle$ geben die Gesamtzahl der nachgewiesenen Photonen für Detektor 1 bzw. 2 an.

Für eine ideale Einzelphotonen-Quelle und ideale Detektoren gilt $g^{(2)}(\tau) = 0$. Dies lässt sich anschaulich leicht erklären, da ein einzelnes Photon am Strahlteiler entweder reflektiert oder transmittiert wird. Die beiden Detektoren können bei einem einzelnen Photon also nicht gleichzeitig ($\tau = 0$) "klicken". Aufgrund von Imperfektionen der Detektoren (z.B. Dunkelrauschen) gilt in der Praxis $g^{(2)}(\tau) < 0.5$ als Nachweis für eine Einzelphotonen-Quelle.

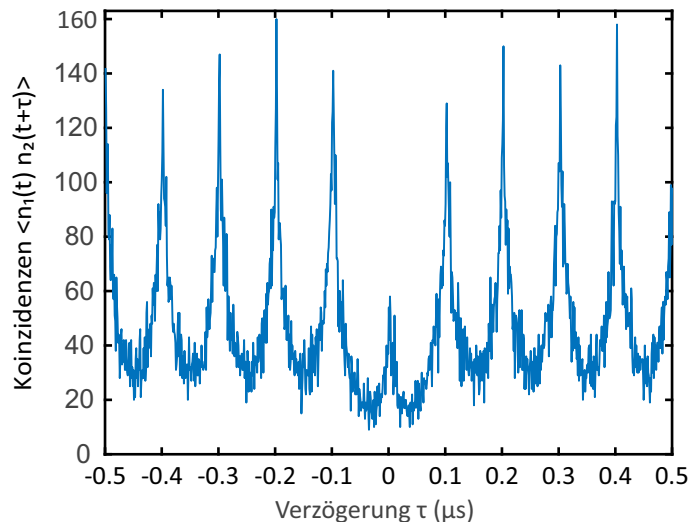


Abbildung 7.14: Mit einem HBT-Experiment gemessene Anzahl der Koinzidenzen für die Emission eines einzelnen Halbleiter-Quantenpunkts nach gepulster Anregung. Daten: Lok-Yee Yan .

7.6 Eigenschaften des Photons - Zusammenfassung

Anhand der in diesem Kapitel vorgestellten Phänomene können wir schließen, dass Licht Teilcheneigenschaften besitzt. Monochromatisches Licht der Frequenz ν setzt sich demnach im Teilchen-Bild aus einem Strom von Lichtquanten (Photonen) mit der Energie $h\nu$ zusammen. Experimentell können die folgenden Eigenschaften des Photons ermittelt werden:

7 Quanteneigenschaften von Licht

- Energie eines Photons:

$$E = h\nu = \hbar\omega. \quad (7.6.1)$$

- Impuls eines Photons:

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}. \quad (7.6.2)$$

- Drehimpuls des Photons (Photonen-Spin):

$$\mathbf{s} = \pm\hbar\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}. \quad (7.6.3)$$

Linkszirkular polarisiertes Licht (σ^+ -Polarisation): $\mathbf{s} = \hbar\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$.

Rechtszirkular polarisiertes Licht (σ^- -Polarisation): $\mathbf{s} = -\hbar\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$.

Experiment: Beugung an einem Spalt mit einzelnen Photonen.

Steht das Photonen-Bild im Widerspruch zum Wellencharakter des Lichts? Nein, denn Beugungsexperimente mit einzelnen Photonen zeigen, dass Licht sowohl Teilchen- als auch Wellencharakter besitzt! Eine konsistente Beschreibung aller Lichteigenschaften ist im Rahmen der Quantenoptik möglich.

8 Elemente der Quantenmechanik

Das vorherige Kapitel hat gezeigt, dass Licht sowohl Wellen- als auch Teilcheneigenschaften aufweisen kann. Im Folgenden werden wir sehen, dass auch Teilchen wie etwa Elektronen Wellencharakter besitzen.

8.1 Materiewellen

8.1.1 De Broglie-Wellenlänge

Louis de Broglie machte 1924 den Vorschlag, die Beziehung $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ ($\hbar = h/2\pi$) auch auf Teilchen mit der Masse m anzuwenden. Mit $E_{kin} = p^2/2m$ (nichtrelativistisches Teilchen) und $k = 2\pi/\lambda_D$ folgt die De-Broglie Wellenlänge:

$$\lambda_D = \frac{h}{\sqrt{2mE_{kin}}}. \quad (8.1.1)$$

Beispiel: De-Broglie Wellenlänge eines Elektrons nach der Beschleunigung durch eine Spannung $U=100$ V.

- Kinetische Energie: $E_{kin} = eU$.
- Elektronenmasse: $m_e = 9.1 \times 10^{-31} kg$
- Elementarladung: $e = 1.6 \times 10^{-19} C$
- Plancksche Konstante: $h = 6.63 \times 10^{-34} Js$

\Rightarrow De-Broglie Wellenlänge: $\lambda_D = 1.2 \times 10^{-10} m$

8.1.2 Beugung und Interferenz von Elektronen

Elektronen-Biprisma

Der Wellencharakter von Elektronen kann mit Hilfe eines Elektronen-Biprismas nachgewiesen werden. Hierzu wird ein metallisierter Quarzfaden mit einem Elektronenstrahl

beleuchtet. Durch das Anlegen einer positiven Spannung an den Fäden werden die Elektronen, die den Fäden passieren, abgelenkt. Auf einem Leuchtschirm hinter dem Faden tritt dann im Überlappungsbereich der beiden Teilwellen ein Interferenzmuster auf.

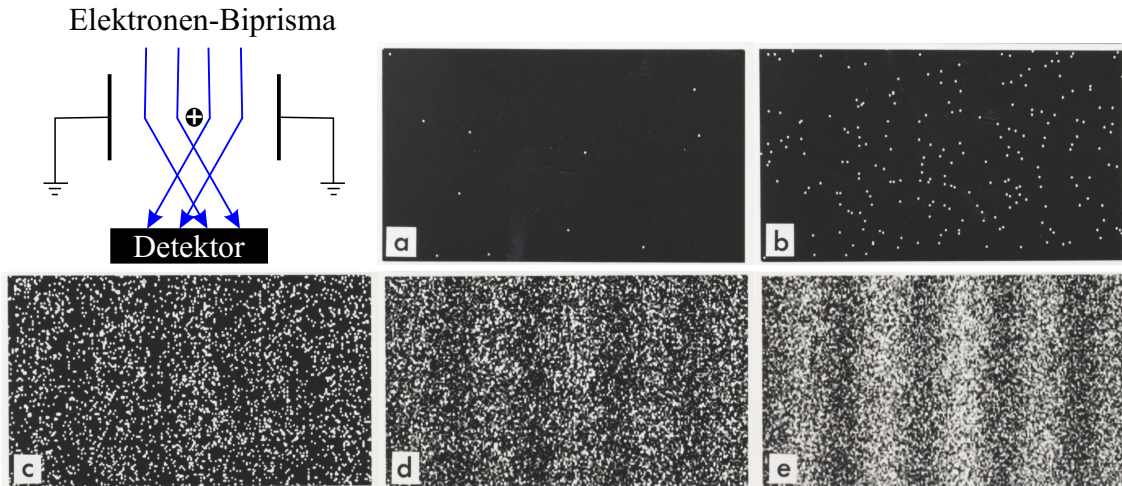


Abbildung 8.1: Elektronen-Biprisma und Interferenzmuster von Elektronen. Die Integrationszeit des Detektors nimmt von a nach e zu. Quelle: Wikipedia, modifiziert.

8.1.3 Beugung von Elektronen am Kristallgitter

Im Folgenden wollen wir die Beugung eines Elektronenstrahls an einem Kristall betrachten. Wir nehmen hierzu an, dass wir die Elektronen durch eine ebene Welle mit der De-Broglie Wellenlänge λ_D beschreiben können. Die Atome des Kristalls bilden parallele Gitterebenen, an denen die Elektronenwelle teilweise reflektiert wird.

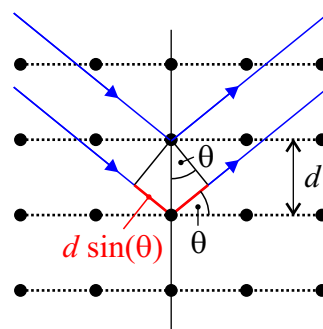


Abbildung 8.2: Bragg-Beugung einer Elektronenwelle am Kristallgitter.

Die reflektierten Teilwellen interferieren genau dann konstruktiv, wenn der Weglängendifferenz zwei Teilwellen ein ganzzahliges Vielfaches n von λ_D ist. Mit Abbildung 8.2

folgt die Bragg-Bedingung:

$$2d \sin(\theta) = n\lambda_D. \quad (8.1.2)$$

Hierbei ist d der Abstand zweier benachbarter Gitterebenen und θ der Winkel zwischen Einfallrichtung und der Gitterebene.

Die Bragg-Bedingung wird bei einem Einkristall und einem monoenergetischen Elektronenstrahl (konstante Wellenlänge λ_D) bei vorgegebener Kristallorientierung nur für ausgewählte Richtungen erfüllt. Wird der Elektronenstrahl hingegen an einer polykristallinen Probe gebeugt, so beobachtet man konzentrische Ringe um die Einfallrichtung mit vollem Öffnungswinkel 4θ (Debye-Scherrer Ringe).

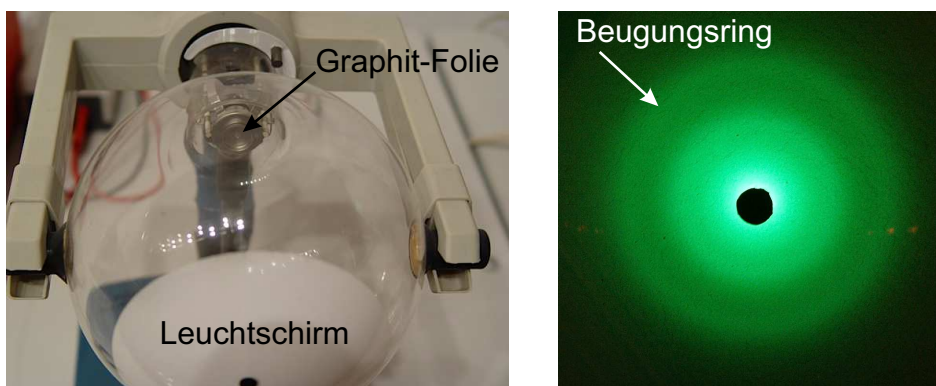


Abbildung 8.3: Links: Elektronenbeugungsröhre mit dünner Graphit-Folie. Rechts: Fluoreszenzschirm mit Beugungsringen.

Experiment: Beugung von Elektronen an Graphit.

Setzt man die De-Broglie Wellenlänge der Elektronen in die Bragg-Bedingung ein, so erhält man:

$$\sin(\theta) = \frac{nh}{2d\sqrt{2meU}}. \quad (8.1.3)$$

Der Öffnungswinkel der Debye-Scherrer Ringe nimmt also mit zunehmender Beschleunigungsspannung U ab.

8.2 Quantenstruktur der Atome

8.2.1 Atomspektren

Experiment: Spektrallampe.

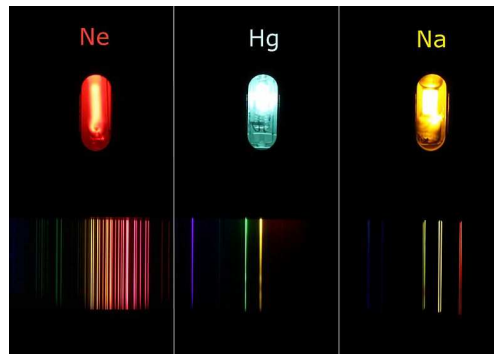


Abbildung 8.4: Spektrallampen (Ne, Hg, Na) mit zugehörigen Spektren. Bild: Wikipedia.

Im Gegensatz zu einem schwarzen Körper emittieren viele Gasentladungslampen Licht nur bei spezifischen Frequenzen. Aus einer Vielzahl von Untersuchungen ergeben sich die folgenden experimentellen Befunde:

- Jede Frequenz die von einem bestimmten Gas emittiert wird kann auch von diesem absorbiert werden. So beobachtet man etwa diskrete Linien (Fraunhoferlinien) im kontinuierlichen Spektrum der Sonne durch Absorption der entsprechenden Gase in der Sonnen-Photosphäre.
- Das Emissions- bzw. Absorptionsspektrum ist charakteristisch für jede Atomsorte und kann somit als "Fingerabdruck" für die Elementanalyse verwendet werden.
- Die spektrale Breite der Linien ist nicht beliebig scharf.

Diese Befunde lassen sich erklären, wenn wir annehmen, dass die Atome diskrete Energieniveaus aufweisen. Durch die Emission bzw. Absorption eines Photons mit passender Energie können Übergänge zwischen diesen Niveaus erfolgen.

Die Frequenzen ν der Emissionslinien von Wasserstoff können im sichtbaren Spektralbereich durch die folgende im Jahre 1885 von Johann Jakob Balmer empirisch gefundene Formel beschrieben werden:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = cR_y \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right), \quad (8.2.1)$$

mit $n_1 = 2$ und $n_2 = 3, 4, 5, \dots$ $R_y = 1.0973731534 \cdot 10^7 m^{-1}$ ist die sogenannte Rydbergkonstante (in Wellenzahlen).

Später wurden von Theodore Lyman und Friedrich Paschen weitere Wasserstoff-Linien entdeckt, deren Frequenzen sich mit der obigen Formel und $n_1 = 1$ (Lyman-Serie) bzw. $n_1 = 3$ (Paschen Serie) beschreiben lassen.

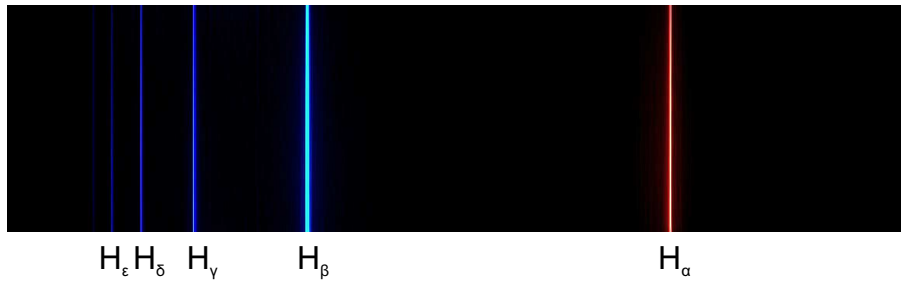


Abbildung 8.5: Sichtbarer Bereich des Wasserstoffspektrums. Die abgebildeten Linien gehören zur Balmer-Serie ($\lambda_{H_\alpha} = 656.3 \text{ nm}$, $\lambda_{H_\beta} = 486.1 \text{ nm}$, $\lambda_{H_\gamma} = 434,0 \text{ nm}$, $\lambda_{H_\delta} = 410.2 \text{ nm}$, $\lambda_{H_\epsilon} = 397.0 \text{ nm}$). Bild: Wikipedia (modifiziert).

8.2.2 Franck-Hertz Versuch

Atome können nicht nur durch Licht, sondern auch durch Stoßprozesse angeregt werden. Der Franck-Hertz Versuch zeigt, dass auch in diesem Fall diskrete Energieniveaus der Atome eine Rolle spielen.

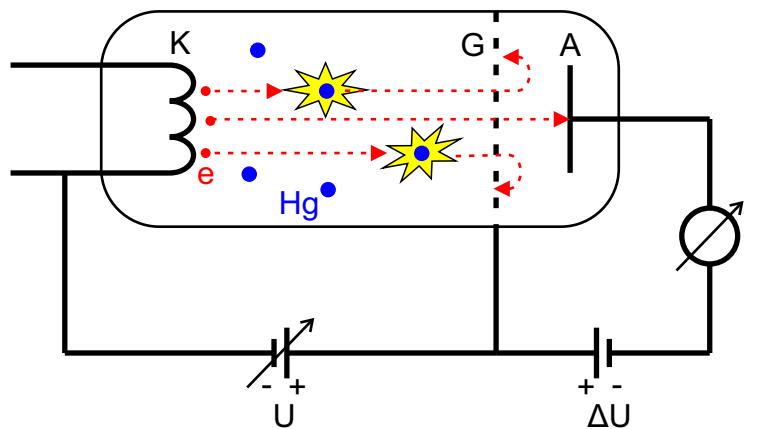


Abbildung 8.6: Prinzipschaltbild des Franck-Hertz Versuchs.

Abbildung 8.6 zeigt eine schematische Darstellung des Franck-Hertz Versuchs. In einer Glasröhre befindet sich Quecksilberdampf mit einem Druck von ca. 10^2 Pa . Elektronen werden von der Glühkathode K emittiert und durch das Anlegen einer Spannung U hin zum Gitter G beschleunigt. Die Anode A ist hinter dem Gitter angebracht und befindet sich auf dem Potential $U - \Delta U$. Somit werden die Elektronen nach der Passage des Gitters

abgebremst und nur die Elektronen erreichen die Anode, deren kinetische Energie beim Passieren des Gitters mindestens $e\Delta U$ beträgt.

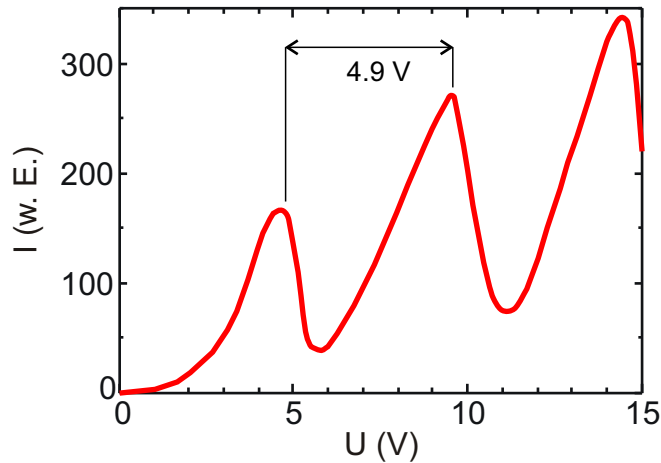


Abbildung 8.7: Elektronenstrom I als Funktion der Beschleunigungsspannung U in einer Röhre mit Quecksilberdampf. Quelle: Wikipedia.

Trägt man den Anodenstrom I als Funktion der Gitterspannung U auf, so erhält man den in Abbildung 8.7 dargestellten Zusammenhang. Im Bereich von $U = 0\text{ V}$ bis $U \approx 4.9\text{ V}$ steigt der Strom monoton an. Anschließend fällt I in einem kleinen Spannungsbereich wieder ab um für noch größere U wieder anzusteigen. Für $U \approx 9.8\text{ V}$ wird ein zweites Maximum beobachtet, dem ein erneuter Stromabfall folgt, etc.

Die experimentellen Ergebnisse lassen sich durch inelastische Stöße der Elektronen mit den Hg-Atomen erklären, bei denen die Hg-Atome aus dem Grundzustand in einen angeregten Zustand übergehen. Hierbei verringert sich die kinetische Energie der Elektron gerade um den zur Anregung notwendigen Betrag von $\Delta E_{\text{kin}} = 4.9\text{ V}$. Ist die kinetische Energie der Elektronen beim Erreichen des Gitters dann kleiner als $e\Delta U$, so kann die zwischen Gitter und Anode angelegte Gegenspannung ΔU nicht überwunden werden und I fällt ab. Elastische Stöße, bei denen sich der interne Zustand der Hg-Atome nicht ändert, spielen aufgrund der großen Massendifferenz zwischen Elektron und Hg-Atom keine Rolle.

8.2.3 Rutherfordsches Atommodell

Im Jahre 1909 führten Ernest Rutherford, Hans Geiger und Ernest Marsden Streuexperimente durch, um die Struktur der Atome zu untersuchen. Als Projektile verwendeten sie α -Teilchen (doppelt ionisierte Heliumkerne) die beim radioaktiven Zerfall von Radium mit einer kinetischen Energie von einigen MeV freigesetzt werden. Beim Beschuss einer dünnen Goldfolie mit den α -Teilchen machten sie die folgenden Beobachtungen:

8 Elemente der Quantenmechanik

- Die meisten α -Teilchen können die Goldfolie ungehindert passieren.
- Bei wenigen α -Teilchen wird eine Ablenkung beobachtet. Hierbei nimmt die Wahrscheinlichkeit mit dem Streuwinkel ϑ ab.
- In extrem wenigen Fällen wird sogar eine Rückwärtsstreuung ($\vartheta \approx 180^\circ$) der α -Teilchen beobachtet.

Eine moderne Version des Rutherford-Experiments ist in Abbildung 8.8 dargestellt.

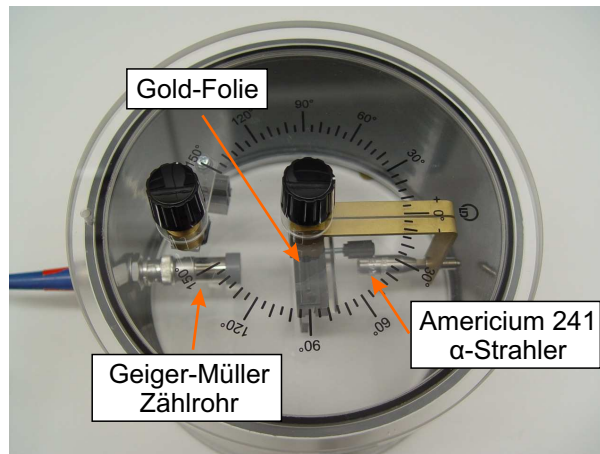


Abbildung 8.8: Rutherford-Experiment.

Experiment: Rutherford Streuung.

Eine genaue Analyse der Messdaten zeigt, dass die Streurrate N als Funktion des Streuwinkels ϑ durch

$$N \propto \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\vartheta}{2}\right)} \quad (8.2.2)$$

beschrieben werden kann.

E. Rutherford schloss¹ aus den Messergebnissen, dass die positive Ladung des Atoms in einem kleinen Raumbereich im Zentrum des Atoms konzentriert sein muss. Die α -Teilchen werden praktisch nur an diesem Atomkern abgelenkt, da ein Elektron eine viel geringere Masse als das α -Teilchen besitzt.

¹*It was quite the most incredible event that has ever happened to me in my life. It was almost as incredible as if you fired a 15-inch shell at a piece of tissue paper and it came back and hit you. On consideration, I realized that this scattering backward must be the result of a single collision, and when I made calculations I saw that it was impossible to get anything of that order of magnitude unless you took a system in which the greater part of the mass of the atom was concentrated in a minute nucleus. It was then that I had the idea of an atom with a minute massive centre, carrying a charge.*
-Ernest Rutherford

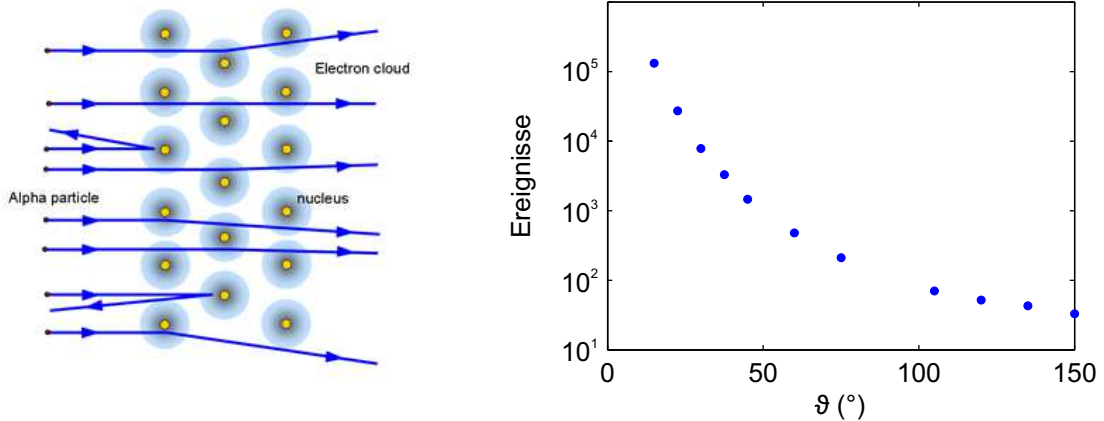


Abbildung 8.9: Links: Streuung von α -Teilchen an Gold Atomen. Quelle: Institute of Physics. Rechts: Zugehörige Zählraten.

8.2.4 Bohrsches Atommodell

Nils Bohr stellte im Jahr 1913 ein Modell vor, mit dem sich viele der damals bekannten experimentellen Befunde aus dem Bereich der Atomphysik konsistent beschreiben ließen. Er musste hierzu allerdings eine Reihe von ad-hoc Annahmen treffen, die im Widerspruch zur klassischen Physik stehen.

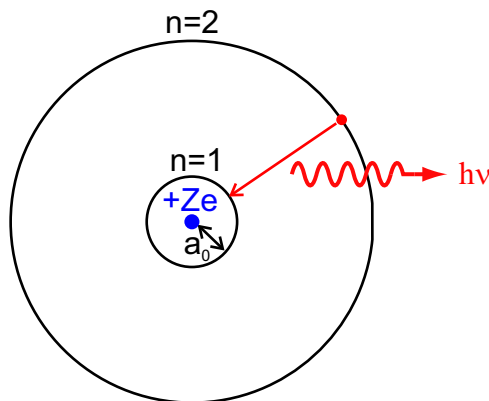


Abbildung 8.10: Bohrsches Atommodell. Das Elektron geht im hier gezeigten Fall von der zweiten Kreisbahn ($n = 2$) in die erste Kreisbahn ($n = 1$) über und sendet hierbei ein Photon der Energie $h\nu = E_{n=2} - E_{n=1}$ aus.

Das Bohrsche Atommodell geht von einem Elektron mit Masse m_e aus, dass mit einer Geschwindigkeit v auf einer kreisförmigen Bahn mit Radius r um den Kern mit Ladung

8 Elemente der Quantenmechanik

+Ze und Masse m_K läuft. Aus der Bedingung Zentripetalkraft = Coulombkraft folgt:

$$\frac{\mu v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2}. \quad (8.2.3)$$

Hierbei ist $\mu = (m_e m_k)/(m_e + m_k) \approx m_e$ die reduzierte Masse.

Nach den Gesetzen der klassischen Physik sind alle Kreisbahnen erlaubt, die die obige Beziehung erfüllen. Man erwartet daher aus klassischer Sicht keine diskreten Energieniveaus. Zudem bilden das umlaufende Elektron und der Kern einen zeitlich veränderlichen Dipol, der ständig Energie abstrahlen sollte. Das Elektron würde daher bereits nach sehr kurzer Zeit in den Kern stürzen. Das Atom sollte aus klassischer Sicht also instabil sein!

Im Bohrschen Atommodell wird nun vorausgesetzt, dass es bestimmte stationäre Elektronenbahnen gibt, auf denen die Elektronen umlaufen können ohne Energie zu verlieren. Laut Annahme sind diese Bahnen gerade stehende Wellen, für die der Umfang der Kreisbahn ein ganzzahliges Vielfaches n der De-Broglie Wellenlänge λ_D ist:

$$2\pi r = n\lambda_D. \quad (8.2.4)$$

Mit $\lambda_D = h/(\mu v)$ folgt daraus für die Elektronengeschwindigkeit:

$$v = \frac{nh}{2\pi\mu r}. \quad (8.2.5)$$

Einsetzen dieser Beziehung in Gleichung (8.2.3) liefert die Bedingung für die Radien der erlaubten stationären Elektronenbahnen:

$$r = \frac{n^2 h^2 \epsilon_0}{\pi \mu Z e^2} = \frac{n^2}{Z} a_0. \quad (8.2.6)$$

In der letzten Umformung haben wir den Bohrschen Radius

$$a_0 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi \mu e^2} \approx 0.5 \text{ \AA} \quad (8.2.7)$$

eingeführt. a_0 ist der Radius der kleinsten stationären Elektronenbahn ($n = 1$) des Wasserstoffatoms ($Z = 1$).

Die Gesamtenergie des Elektrons in einer stationären Bahn ist gegeben durch

$$E_n = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \mu v^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -R_y^* \frac{Z^2}{n^2} \quad (8.2.8)$$

mit der Rydbergkonstanten (in Energieeinheiten)

$$R_y^* = \frac{\mu e^4}{8\epsilon_0^2 h^2}. \quad (8.2.9)$$

Die stationären Elektronenzustände können im Bohrschen Atommodell also nur bestimmte diskrete Energien E_n annehmen, die durch die Quantenzahl $n = 1, 2, 3, \dots$ festgelegt sind.

R_y^* hängt von der reduzierten Masse ab und ist daher für verschiedene Atomsorten unterschiedlich groß. Da der Atomkern aber in allen Fällen viel schwerer als das Elektron ist, können wir in sehr guter Näherung annehmen, dass $\mu = m_e$ gilt. Wir erhalten dann den Wert

$$R_\infty = 13.61 \text{ eV}. \quad (8.2.10)$$

Um die experimentell beobachteten Linienspektren zu erklären, wird nun postuliert, dass nur Übergänge von einem stationären Elektronenzustand mit Energie E_{n_1} zu einem anderen stationären Elektronenzustand mit Energie E_{n_2} möglich sind (Quantensprung). So kann das Atom von einem tieferen Energiezustand E_{n_1} in einen höheren Energiezustand E_{n_2} durch die Absorption eines Photons mit Photonenenergie

$$h\nu = E_{n_2} - E_{n_1} \quad (8.2.11)$$

übergehen. Umgekehrt wird beim Übergang von einem energetisch höheren stationären Zustand $E_{n'_1}$ zu einem energetisch tieferen stationären Zustand $E_{n'_2}$ ein Photon mit der Energie $h\nu = E_{n'_1} - E_{n'_2}$ emittiert. Mit Gleichung (8.2.8) ergibt sich für die Emissionsfrequenz:

$$\nu = \frac{R_\infty}{h} Z^2 \left(\frac{1}{n_2'^2} - \frac{1}{n_1'^2} \right). \quad (8.2.12)$$

Insbesondere gilt für Wasserstoff ($Z = 1$):

$$\nu = \frac{R_\infty}{h} \left(\frac{1}{n_2'^2} - \frac{1}{n_1'^2} \right). \quad (8.2.13)$$

Das Bohrsche Atommodell liefert also eine Erklärung für die empirisch gefundene Formel (8.2.1). Die Balmer-Serie beinhaltet die Übergänge, bei denen das Elektronen aus einem stationären Zustand mit $n_1' = 3, 4, 5, \dots$ in den Zustand mit $n_2' = 2$ unter Emission eines Photons wechselt.

8.3 Wellenfunktion, Wahrscheinlichkeitsdichte und Schrödingergleichung

Zur Beschreibung eines Teilchens (z.B. eines Elektrons) mit Masse m führen wir im Rahmen der Quantenmechanik eine Wellenfunktion $\Psi(\mathbf{r}, t)$ ein. Die Wellenfunktion ist im allgemeinen eine komplexe Größe.

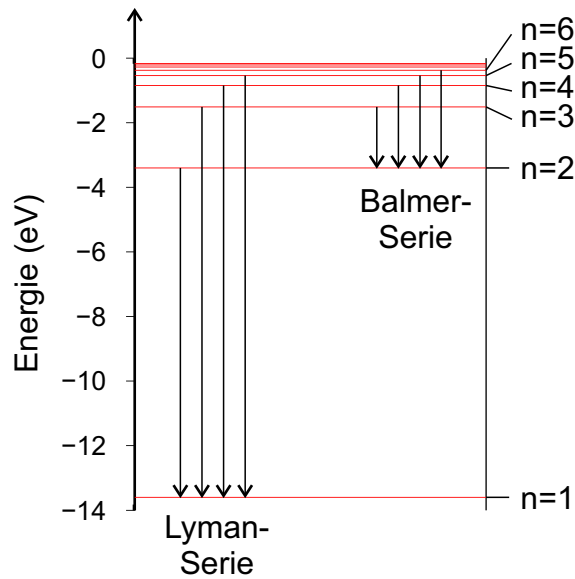


Abbildung 8.11: Energieniveaus eines Wasserstoffatoms nach dem Bohrschen Atommodell.

Die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen zu einem Zeitpunkt t in einem Volumenelement $d\mathbf{r}$ anzutreffen ist proportional zum Absolutquadrat der Wellenfunktion:

$$W(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 d\mathbf{r}. \quad (8.3.1)$$

$W(\mathbf{r}, t)$ wird in der Literatur als Wahrscheinlichkeitsdichte bezeichnet.

Da ein existierendes Teilchen mit Sicherheit irgendwo im Raum zu finden ist, gilt:

$$\int \int \int |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 d\mathbf{r} = 1 \quad (8.3.2)$$

Die zeitliche Entwicklung der Wellenfunktion für ein Teilchen der Masse m in einem Potential $V(\mathbf{r}, t)$ wird durch die Schrödingergleichung beschrieben:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}, t) \Psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (8.3.3)$$

Wir betrachten im folgenden zeitlich konstante Potentiale $V(\mathbf{r})$. In diesem Fall wählen wir für die Wellenfunktion einen Produktansatz:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi(\mathbf{r}) e^{-i\frac{E}{\hbar}t}. \quad (8.3.4)$$

Einsetzen in Gleichung (8.3.3) liefert die sogenannte stationäre Schrödingergleichung:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}) = E \Psi(\mathbf{r}). \quad (8.3.5)$$

Wie bei der Wellengleichung der Elektrodynamik gilt auch bei der stationären Schrödingergleichung das Superpositionsprinzip. Sind Ψ_1 und Ψ_2 Lösungen, so ist auch $a\Psi_1 + b\Psi_2$ eine Lösung der stationären Schrödingergleichung. a und b sind konstante, komplexe Koeffizienten.

8.3.1 Freies Teilchen

Wir betrachten nun zuerst ein freies Teilchen mit $V(\mathbf{r}) = 0$. Im eindimensionalen Fall lautet die stationäre Schrödingergleichung:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x)}{\partial x^2} = E\Psi(x). \quad (8.3.6)$$

Mit dem Ansatz einer ebenen Welle

$$\Psi(x) = C e^{ikx} \quad (8.3.7)$$

folgt aus der stationären Schrödingergleichung

$$\frac{(\hbar k)^2}{2m} = E. \quad (8.3.8)$$

Mit der Beziehung $p = \hbar k$ finden wir die Dispersionsrelation

$$E = \frac{p^2}{2m}. \quad (8.3.9)$$

E ist also in diesem Fall die kinetische Energie des Teilchens.

Die Wahrscheinlichkeitsdichte einer ebenen Welle ist räumlich konstant, d.h. das zugehörige Teilchen ist über den gesamten Raum „verschmiert“. Der zugehörige Impuls des Teilchens $p = \hbar k$ ist dagegen genau bekannt.

Das Superpositionsprinzip erlaubt es uns nun Wellenpakete zu konstruieren, die zu einer räumlichen Lokalisierung der Materiewelle führen:

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}(k) e^{i(kx - \frac{E(k)}{\hbar}t)} dk. \quad (8.3.10)$$

Hierbei beschreibt $\tilde{\Psi}(k)$ das Gewicht der einzelnen ebenen Wellen mit Wellenzahl k . $\Psi(x, 0)$ und $\tilde{\Psi}(k)$ sind per Fourier-Transformation miteinander verknüpft.

Wir betrachten nun als instruktives Beispiel ein Gauss-Paket:

$$\tilde{\Psi}(k) = \frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{3/4}} e^{-(a/2)^2 (k-k_0)^2}. \quad (8.3.11)$$

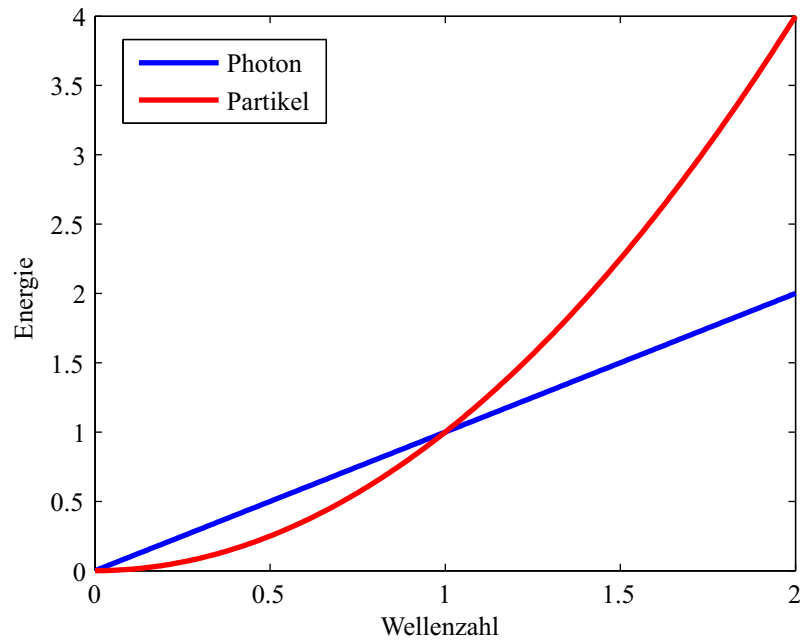


Abbildung 8.12: Dispersionsrelationen für ein Photon und ein freies Teilchen der Masse m .

Die Auswertung des Integrals liefert:

$$\Psi(x, 0) = \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{1/4} e^{-x^2/a^2} e^{ik_0 x}. \quad (8.3.12)$$

Das Wellenpaket hat bei $x = 0$ die maximale Amplitude. Für $x_{1,2} = \pm a/2$ fällt die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\Psi(x, 0)|^2$ auf den Wert $|\Psi(0, 0)|^2/\sqrt{e}$ ab. Das Intervall $x_1 - x_2 = \Delta x = a$ wird als räumliche Breite des Wellenpakets definiert. Analog ist $\Delta k = 1/a$ die Breite des Wellenpakets im k -Raum. Der Ort und der Impuls des Teilchens können nicht gleichzeitig mit beliebiger Genauigkeit angegeben werden. In der Wellenmechanik (wie auch in der Optik) gilt somit die Heisenbergsche Unschärferelation:

$$\boxed{\Delta x \Delta p \geq \hbar.} \quad (8.3.13)$$

Die Geschwindigkeit des Teilchens ist gegeben durch die Gruppengeschwindigkeit v_g des Wellenpakets. Zusammen mit der Dispersionsrelation (8.3.9) erhalten wir:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar k}{m} = \frac{p}{m}. \quad (8.3.14)$$

Aufgrund der Impulsunschärfe des Wellenpakets gilt:

$$\Delta v_g = \frac{\Delta p}{m} = \frac{\hbar}{m \Delta x}. \quad (8.3.15)$$

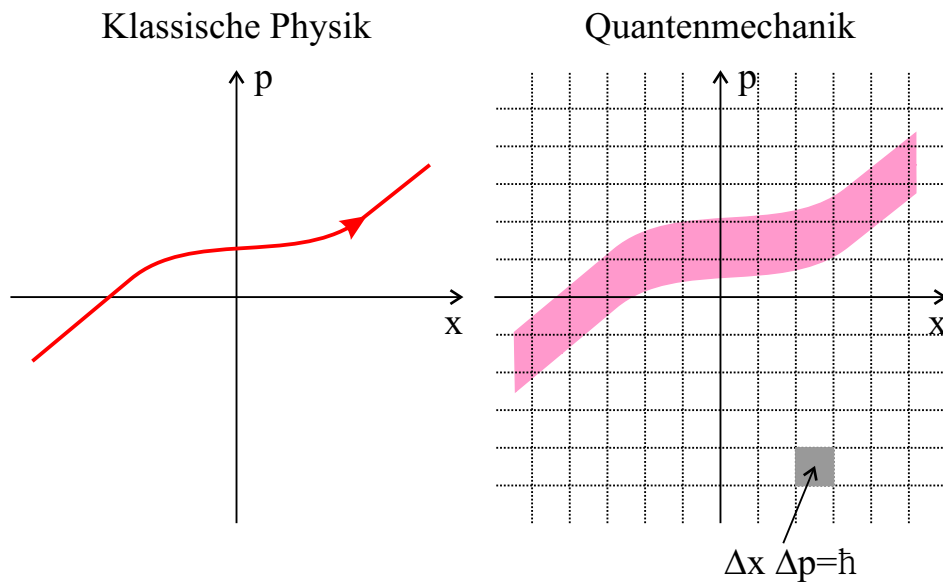


Abbildung 8.13: Bahn eines Teilchen im Phasenraum. Links: klassisches Teilchen. Rechts: quantenmechanisches Teilchen.

Für die räumliche Breite des Wellenpakets folgt damit:

$$\Delta x(t) = \Delta x(0) + \Delta v_g t = \Delta x(0) + \frac{\hbar}{m\Delta x} t. \quad (8.3.16)$$

Wir sehen also, dass das Wellenpaket mit der Zeit räumlich breiter wird, d.h., das Teilchen ist immer weniger lokalisiert. Dies ist die analoge Situation zu einem optischen Impuls in einem dispersiven Medium.

8.3.2 Quantenmechanischer Doppelspaltversuch

In diesem Abschnitt wollen wir die quantenmechanische Version des Doppelspaltversuchs besprechen. Hierzu betrachten wir das folgende Gedankenexperiment: Eine Glühkathode emittiert Elektronen, die auf eine Blende mit zwei schmalen Spalten treffen. Die durch die Spalte transmittierten Elektronen werden in der Beobachtungsebene von einem ortsensitiven Detektor nachgewiesen. Wir nehmen im folgenden an, dass die Temperatur der Glühkathode so gering ist, dass sich zu jedem Zeitpunkt nur ein einzelnes Elektron in der Apparatur befindet. Durch die Wahl einer langen Detektor-Integrationszeit wird der Doppelspaltversuch mit vielen Elektronen durchgeführt.

Zunächst wollen wir den unteren Spalt schließen (siehe Abbildung 8.14 (a)). Alle nachgewiesenen Elektronen müssen daher durch den oberen Spalt von der Quelle zum Detektor gelangt sein. Die zugehörige Wellenfunktion sei $\Psi_1(x)$ und die Wahrscheinlichkeit ein Elektron in der Beobachtungsebene an der Position x zu finden ist durch $W_1(x) = |\Psi_1(x)|^2$ gegeben.

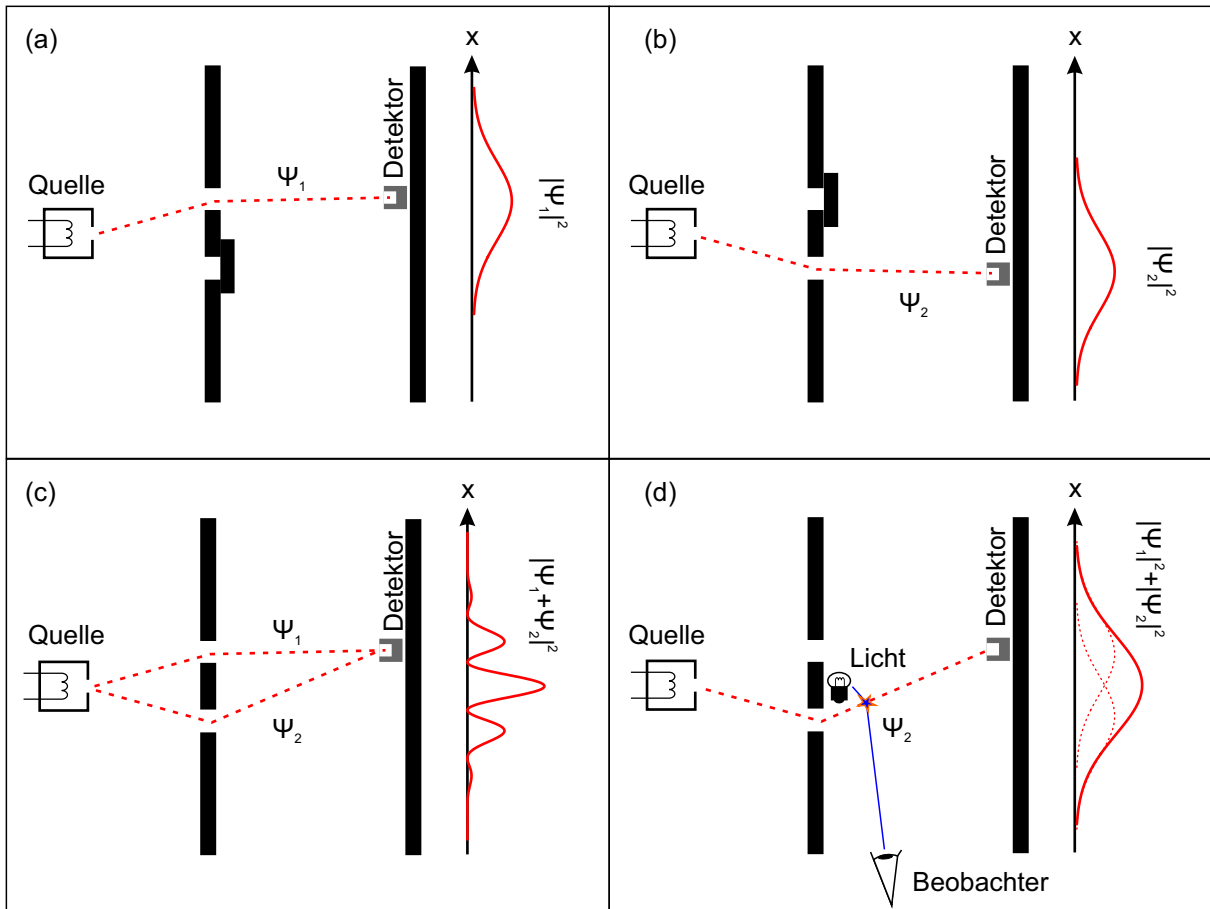


Abbildung 8.14: Doppelspaltversuch mit Elektronen.

Analog wird das Elektron durch die Wellenfunktion $\Psi_2(x)$ beschrieben, wenn wir anstatt des unteren Spalts den oberen schließen (siehe Abbildung 8.14 (b)). Die entsprechende Nachweiswahrscheinlichkeit ist dann $W_2(x) = |\Psi_2(x)|^2$.

Werden beide Spalte geöffnet (siehe Abbildung 8.14 (c)), so kann das Elektron auf zwei unterschiedlichen Wegen von der Quelle zum Detektor gelangen. Nach den Regeln der Quantenmechanik müssen in diesem Fall die Wellenfunktionen der beiden Wege kohärent überlagert werden um die Gesamtwellenfunktion zu erhalten:

$$\Psi(x) = \Psi_1(x) + \Psi_2(x). \tag{8.3.17}$$

Die Nachweiswahrscheinlichkeit des Elektrons am Ort x lautet somit:

$$W(x) = |\Psi_1(x) + \Psi_2|^2 = W_1(x) + W_2(x) + \Psi_1(x)\Psi_2^*(x) + \Psi_1^*(x)\Psi_2(x). \tag{8.3.18}$$

Die letzten beiden Terme führen zur Ausbildung eines Interferenzmusters!

Im letzten Schritt erweitern wir unser Gedankenexperiment um eine sehr starke Lichtquelle (siehe Abbildung 8.14 (d)). Durch die Beobachtung des am Elektron gestreuten

Lichts kann ein Experimentator entscheiden, durch welchen Spalt das Elektron zum Detektor gelangt ist. In dem gezeigten Beispiel sieht der Experimentator, dass das Elektron den unteren Spalt passiert hat, so dass die Nachweiswahrscheinlichkeit für dieses eine Elektron durch $W_2(x)$ gegeben ist. Bei der Wiederholung mit vielen Elektronen ergibt sich die Nachweiswahrscheinlichkeit zu:

$$W(x) = |\Psi_1(x)|^2 + |\Psi_2(x)|^2 = W_1(x) + W_2(x). \quad (8.3.19)$$

Die „Welcher Weg“-Beobachtung zerstört also das Interferenzmuster!

8.3.3 Potentialstufe

Als Nächstes untersuchen wir ein Teilchen, das auf eine eindimensionale Potentialbarriere trifft:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ E_0 & \text{für } x \geq 0 \end{cases} \quad (8.3.20)$$

Für $x < 0$ (Gebiet *I*) ist die Wellenfunktion gegeben durch:

$$\Psi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}. \quad (8.3.21)$$

Für $x \geq 0$ (Gebiet *II*) lautet die stationäre Schrödingergleichung:

$$\nabla^2\Psi(x) + \frac{2m}{\hbar^2}(E - E_0)\Psi(x) = 0. \quad (8.3.22)$$

Mit $\alpha = \sqrt{2m(E_0 - E)}/\hbar$ lauten die zugehörigen Lösungen:

$$\Psi_{II}(x) = Ce^{\alpha x} + De^{-\alpha x}. \quad (8.3.23)$$

Damit

$$\Psi(x) = \begin{cases} \Psi_I(x) & \text{für } x < 0 \\ \Psi_{II}(x) & \text{für } x \geq 0 \end{cases} \quad (8.3.24)$$

eine Lösung im gesamten Bereich ist, muss Ψ überall stetig differenzierbar sein. Somit gilt:

$$\Psi_I(0) = \Psi_{II}(0) \Rightarrow A + B = C + D \quad (8.3.25)$$

und

$$\left[\frac{d\Psi_I}{dx} \right]_0 = \left[\frac{d\Psi_{II}}{dx} \right]_0 \Rightarrow ik(A - B) = \alpha(C - D). \quad (8.3.26)$$

1. Fall: $E < E_0$

Für $E < E_0$ ist α reell. Damit Ψ_{II} normierbar bleibt, muss der Koeffizient C null sein. Aus den Stetigkeitsbedingungen folgt:

$$B = \frac{i k + \alpha}{i k - \alpha} A \quad (8.3.27)$$

und

$$D = \frac{2 i k}{i k - \alpha} A. \quad (8.3.28)$$

Die Wellenfunktion im Bereich I lautet somit:

$$\Psi_I(x) = A \left[e^{i k x} + \frac{i k + \alpha}{i k - \alpha} e^{-i k x} \right]. \quad (8.3.29)$$

Der Bruchteil R der reflektierten Teilchen folgt aus

$$R = \frac{|B e^{-i k x}|^2}{|A e^{i k x}|^2} = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \left| \frac{i k + \alpha}{i k - \alpha} \right|^2 = 1. \quad (8.3.30)$$

Wie in der klassischen Mechanik werden also auch in der Wellenmechanik alle Teilchen reflektiert. Allerdings kann bei der wellenmechanischen Behandlung das Teilchen ein Stück weit in die Potentialstufe eindringen.

Die Wahrscheinlichkeitsdichte für $x > 0$ ist gegeben durch:

$$W(x) = |\Psi_{II}|^2 = |D e^{-\alpha x}|^2 = \frac{4 k^2}{\alpha^2 + k^2} |A|^2 e^{-2 \alpha x}. \quad (8.3.31)$$

Als Eindringtiefe definieren wir den Wert $x = 1/(2\alpha)$, für den die Wahrscheinlichkeitsdichte um den Faktor $1/e$ im Vergleich zur Grenzfläche abgefallen ist.

2. Fall: $E > E_0$

Für $E > E_0$ ist α imaginär. Wir definieren nun die reelle Größe

$$k' = i \alpha = \sqrt{2 m (E - E_0)} / \hbar \quad (8.3.32)$$

Die Wellengleichung im Gebiet II lautet somit:

$$\Psi_{II}(x) = C e^{-i k' x} + D e^{i k' x}. \quad (8.3.33)$$

Wir nehmen an, dass das Teilchen von links ($x < 0$) auf die Potentialstufe trifft, so dass $C = 0$ gilt. Aus den Randbedingungen folgt:

$$B = \frac{k - k'}{k + k'} A \quad (8.3.34)$$

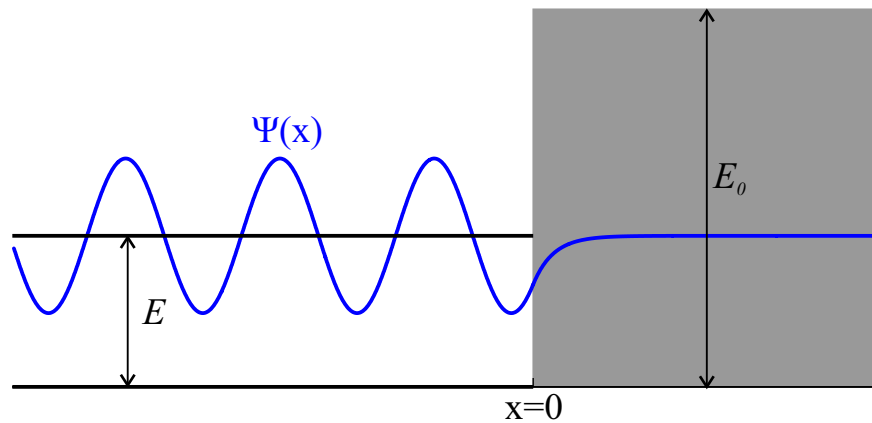


Abbildung 8.15: Wellenfunktion für ein Teilchen, das an einer Potentialstufe reflektiert wird.

und

$$D = \frac{2k'}{k + k'}A. \quad (8.3.35)$$

An der Potentialstufe wird der Bruchteil R der Teilchen reflektiert, mit

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \left| \frac{k - k'}{k + k'} \right|^2 \quad (8.3.36)$$

Im Gegensatz zur klassischen Mechanik wird im Falle der Wellenmechanik ein Teil der einfallenden Teilchen reflektiert!

8.3.4 Tunneleffekt

Wir betrachten im Folgenden eine rechteckige Potentialbarriere der Dicke a :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \text{ (Gebiet I)} \\ E_0 & \text{für } 0 \leq x \leq a \text{ (Gebiet II)} \\ 0 & \text{für } x > a \text{ (Gebiet III)} \end{cases} \quad (8.3.37)$$

Wir nehmen an, dass die Energie E des Teilchens kleiner als E_0 ist. Für die Wellenfunktion wählen wir den folgenden Ansatz:

$$\Psi_I = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \quad (8.3.38)$$

$$\Psi_{II} = Ce^{\alpha x} + De^{-\alpha x}, \quad (8.3.39)$$

$$\Psi_{III} = Fe^{ikx}. \quad (8.3.40)$$

Die Koeffizienten A, B, C, D und F folgen aus den Steigkeitsbedingungen für $x = 0$ und $x = a$. Man findet nach einer kurzen Rechnung für eine breite Barriere ($a\alpha \gg 1$):

$$T = \frac{|F|^2}{|A|^2} \approx \frac{16E}{E_0^2} (E_0 - E) e^{-2\alpha a}. \quad (8.3.41)$$

Im Gegensatz zu einem klassischen Teilchen kann ein quantenmechanisches Teilchen mit einer endlichen Wahrscheinlichkeit durch die Barriere gelangen. Dieses Phänomen wird Tunneleffekt genannt. Der Tunneleffekt spielt zum Beispiel beim α -Zerfall eine entscheidende Rolle. In der Optik tritt der Tunneleffekt in der Form der verbotenen Totalreflexion bei einem dünnen Luftspalt zwischen zwei Glasplatten auf.

8.3.5 Teilchen in einem Potentialkasten

Wir untersuchen nun den Fall, dass das Teilchen mit Energie E auf einen Raumbereich $0 \leq x \leq a$ beschränkt wird. Hierzu betrachten wir einen „Potentialtopf“ der Form

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x \leq a, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases} \quad (8.3.42)$$

Für $0 \leq x \leq a$ ist die Wellenfunktion gegeben durch

$$\Psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}. \quad (8.3.43)$$

Die Wellenfunktion ist aufgrund der unendlich hohen Potentialwände für $x < 0$ und $x > a$ identisch null. Daraus ergeben sich die Randbedingungen:

$$A + B = 0 \quad (8.3.44)$$

$$Ae^{ika} + Be^{-ika} = 0. \quad (8.3.45)$$

Aus der ersten Randbedingung folgt:

$$\Psi(x) = A(e^{ikx} - e^{-ikx}) = 2iA \sin(kx). \quad (8.3.46)$$

Mit Hilfe der zweiten Randbedingung finden wir:

$$2iA \sin(ka) = 0 \Rightarrow k = \frac{n\pi}{a} (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (8.3.47)$$

Einsetzen der Wellenfunktionen

$$\Psi_n(x) = 2iA \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad (8.3.48)$$

in die Schrödingergleichung liefert die möglichen Energiewerte

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m a^2} n^2. \quad (8.3.49)$$

8 Elemente der Quantenmechanik

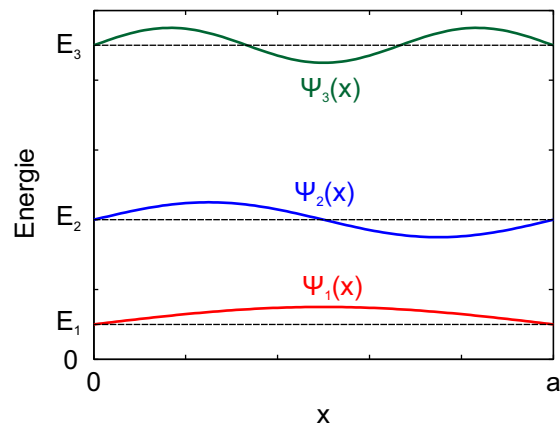


Abbildung 8.16: Wellenfunktionen und Energieniveaus eines Teilchen im unendlich hohen Potentialkasten.

Das Teilchen im Potentialkasten kann also nur diskrete Energiewerte annehmen. Die minimale Energie, die sogenannte Nullpunktsenergie, ist nicht null, sondern

$$E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m a^2}. \quad (8.3.50)$$

Die Nullpunktsenergie resultiert aus der Ortsbeschränkung und der Heisenbergschen Unschärferelation. Halbleiter-Quantenpunkte können in erster Näherung als Realisierung eines Potentialkastens aufgefasst werden.

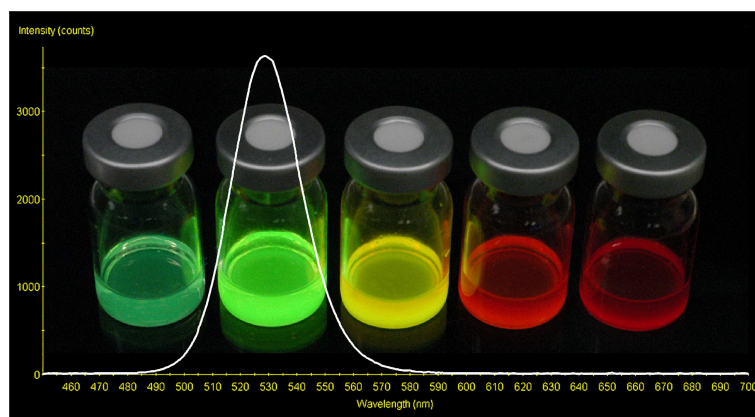


Abbildung 8.17: Lumineszierende CdSe-Quantenpunkte. Die Größe der Quantenpunkte nimmt von links nach rechts zu. Quelle: Wikipedia.

8.3.6 Harmonischer Oszillator

Im Folgenden untersuchen wir die quantenmechanischen Eigenschaften eines eindimensionalen harmonischen Oszillators. Dazu betrachten wir ein Teilchen mit Masse m in einem Potential der Form

$$V(x) = \frac{1}{2}\omega^2 m x^2. \quad (8.3.51)$$

Die stationäre Schrödingergleichung lautet somit:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{1}{2}\omega^2 m x^2 \Psi = E\Psi. \quad (8.3.52)$$

Wir führen nun die Variablentransformation

$$\xi = x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \quad (8.3.53)$$

und die Abkürzung

$$C = \frac{2E}{\hbar\omega} \quad (8.3.54)$$

ein und erhalten

$$\frac{d^2\Psi}{d\xi^2} + (C - \xi^2)\Psi = 0. \quad (8.3.55)$$

Wir probieren nun den Lösungsansatz

$$\Psi(\xi) = H(\xi)e^{-\xi^2/2}. \quad (8.3.56)$$

Durch Einsetzen erhalten wir für die Funktion $H(\xi)$ die Gleichung:

$$\frac{d^2H}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dH}{d\xi} + (C - 1)H = 0. \quad (8.3.57)$$

Dies ist die Hermite'sche Differentialgleichung, deren Lösung die Hermite'schen Polynome $H_n(\xi)$ vom Grade n sind. Diese lassen sich durch eine endliche Potenzreihe darstellen:

$$H_n(\xi) = \sum_{i=0}^n a_i \xi^i. \quad (8.3.58)$$

Einsetzen dieser Potenzreihe in die Hermite'sche Differentialgleichung liefert durch Koeffizientenvergleich die Rekursionsformel:

$$(i+2)(i+1)a_{i+2} = [2i - (C-1)]a_i. \quad (8.3.59)$$

8 Elemente der Quantenmechanik

Da ξ^n nach Annahme die höchste Potenz in der Potenzreihe (8.3.58) ist, muss die Bedingung $a_{n+2} = 0$ erfüllt sein. Aufgrund der Rekursionsformel muss daher gelten:

$$[2n - (C - 1)] = 0 \Rightarrow n = \frac{1}{2}(C - 1). \quad (8.3.60)$$

Mit $C = \frac{2E}{\hbar\omega}$ folgen schließlich die Energieeigenwerte des harmonischen Oszillators:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega, n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.3.61)$$

Die Energieeigenwerte sind also diskret und besitzen einen äquidistanten Energieunterschied von $\hbar\omega$. Wie beim Potentialtopf ist auch beim harmonischen Oszillator die minimale Energie aufgrund der Unschärferelation nicht null. Man findet für die Energie des Grundzustands des harmonischen Oszillators $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$.

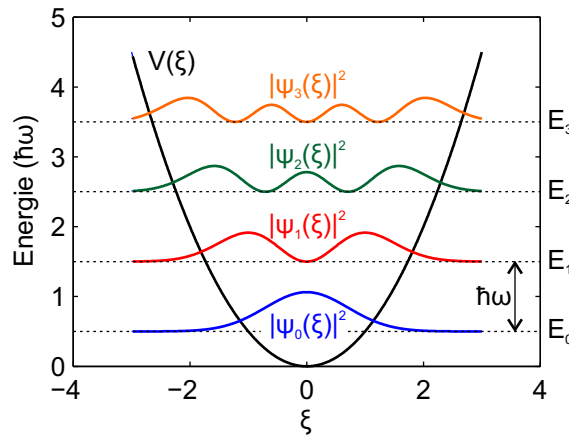


Abbildung 8.18: Energieniveaus und Quadrate der Wellenfunktionen des harmonischen Oszillators.